

Communicatietheorie

Hoofdstuk 1 : Signalen

Naslagwerk

- Appendix 1: basisprincipes van signaalverwerking
- Appendix 2: basisprincipes van probabiliteitstheorie
- Appendix 3: basisprincipes van computersimulaties

Signalen ??

- (digitale) informatie vervat in uitgezonden *signaal*
- transmissiekanaal voegt stoorsignaal (ruis, interferentie) toe
- ontvanger extraheert (digitale) informatie uit ontvangen *signaal*

Interpreteer signalen als in de tijd fluctuerende fysische grootheden
(voorbeeld : elektrische spanning als fysische grootheid)

Fysische signalen zijn *reëelwaardig*

Het is echter handig sommige reëelwaardige fysische signalen voor te stellen
door equivalente *complexwaardige* signalen

→ signalen in de cursus zijn (meestal) complexwaardig

Signalen : basisbegrippen

Continue-tijd Fouriertransformatie

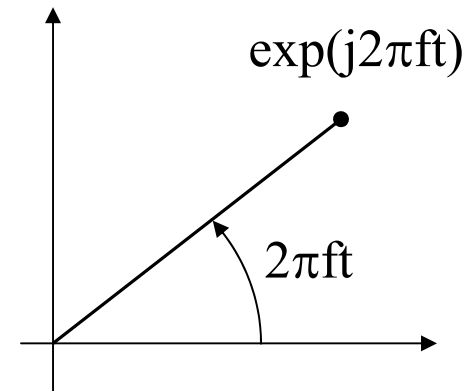
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (\text{FT})$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (\text{IFT})$$

$x(t)$: continue-tijd signaal

t : continue tijd [s] $-\infty < t < +\infty$

f : “mathematische” frequentie [Hz]
 $-\infty < f < +\infty$



$f > 0$: draait naar links

$f < 0$: draait naar rechts

Notatie :

$x(t) \leftrightarrow X(f)$ $x(t)$ en $X(f)$ vormen een FT-transformpaar

Continue-tijd Fouriertransformatie

Belangrijke eigenschappen (bewijs ze zelf !)

als $x(t) \leftrightarrow X(f)$, dan geldt

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

$$x(t - \tau) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f\tau}$$

$$x(t)e^{j2\pi Ft} \leftrightarrow X(f - F)$$

$$x(t) \text{ reëel} \Leftrightarrow X(f) = X^*(-f)$$

Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$$

Discrete-tijd Fouriertransformatie

$$X(e^{j2\pi fT}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j2\pi fkT} \quad (\text{DTFT})$$

periodiek in f met periode $1/T$

$$x(k) = T \int_{1/T} X(e^{j2\pi fT}) e^{j2\pi fkT} df \quad (\text{IDTFT})$$

integratie over een periode $1/T$

$\{x(k)\}$: discrete-tijd signaal

T [s]: interval tussen opeenvolgende
tijdstippen k en $k+1$

k (geheel) : discrete tijd $-\infty < k < +\infty$

f : “mathematische” frequentie [Hz] $-\infty < f < +\infty$

Notatie :

$x(k) \leftrightarrow X(e^{j2\pi fT})$ $x(k)$ en $X(e^{j2\pi fT})$ vormen een DTFT-transformpaar

Discrete-tijd Fouriertransformatie

Belangrijke eigenschappen (bewijs ze zelf !)

als $x(k) \leftrightarrow X(e^{j2\pi fT})$, dan geldt

$$\begin{aligned}x^*(k) &\leftrightarrow X^*(e^{-j2\pi fT}) \\x(k-m) &\leftrightarrow X(e^{j2\pi fT})e^{-j2\pi fmT} \\x(k)e^{j2\pi FkT} &\leftrightarrow X(e^{j2\pi(f-F)T})\end{aligned}$$

$$x(k) \text{ reëel} \Leftrightarrow X(e^{j2\pi fT}) = X^*(e^{-j2\pi fT})$$

Parseval :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k) = T \int_{1/T} X(e^{j2\pi fT})Y^*(e^{j2\pi fT})df$$

Deltafuncties

Kronecker-deltafunctie $\delta(k)$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$x(k_0) = \sum_k x(k) \delta(k - k_0)$$

als $k_0 \in$ sommatie-interval

$$\begin{array}{ccc} & \text{DTFT} & \\ \delta(k) & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ & \xleftarrow{\quad} & \\ & \text{IDTFT} & \end{array}$$

Dirac-deltafunctie $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \delta(t) dt = 1$$

$$x(t_0) = \int x(t) \delta(t - t_0) dt$$

als $t_0 \in$ integratie-interval

$$\begin{array}{ccc} & \text{FT} & \\ \delta(t) & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ & \xleftarrow{\quad} & \\ & \text{IFT} & \end{array}$$

(alle $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$)

Discrete-tijd LTI filter



$\{h(k)\}$: impulsantwoord

$H(e^{j2\pi f\Gamma})$: transferfunctie



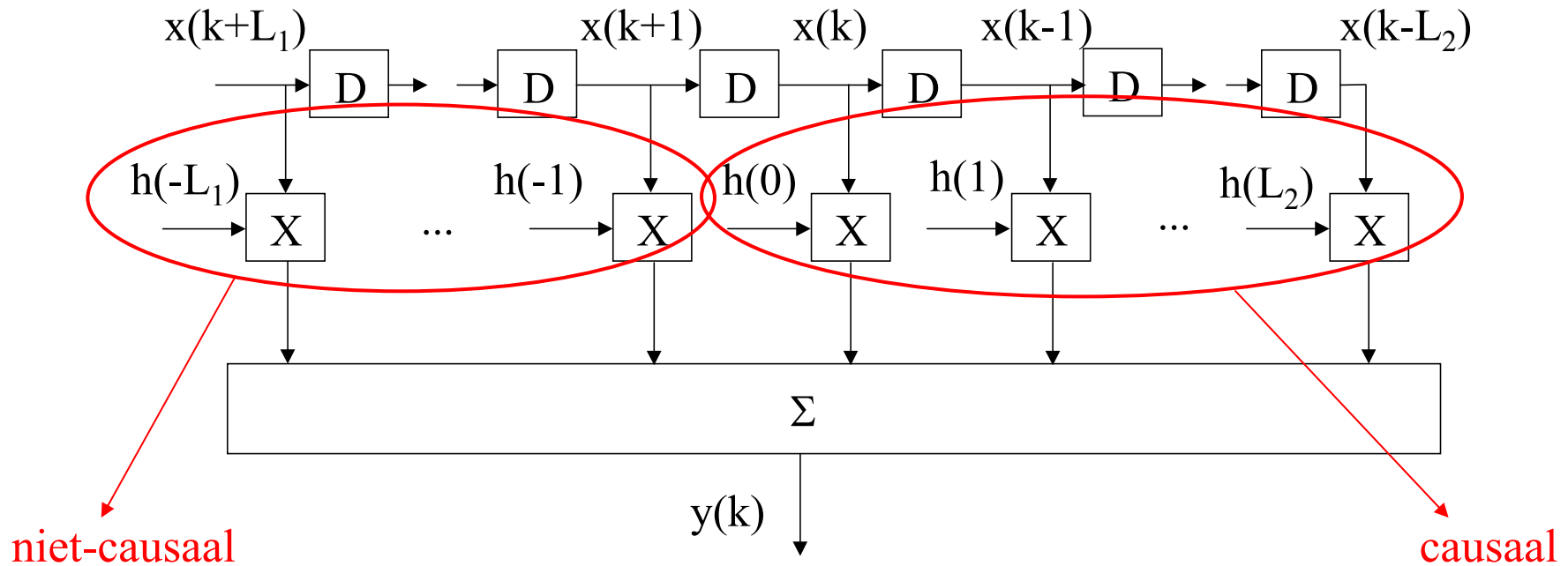
$$y(k) = (h(m) \otimes x(m))(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(k-m)x(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(k-m)h(m) \quad (\text{convolutie})$$

$$Y(e^{j2\pi f\Gamma}) = H(e^{j2\pi f\Gamma})X(e^{j2\pi f\Gamma})$$

vectornotatie : $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$, met $y_k = y(k)$, $x_k = x(k)$, $H_{k,m} = h(k-m)$

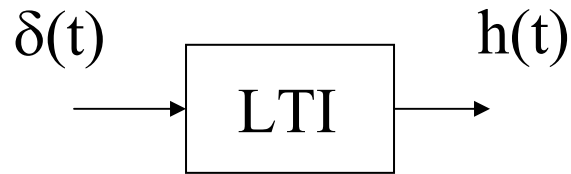
Discrete-tijd LTI filter

stel $h(k) = 0$ voor $k < -L_1$ en $k > L_2$ $y(k) = \sum_{m=-L_1}^{L_2} x(k-m)h(m)$



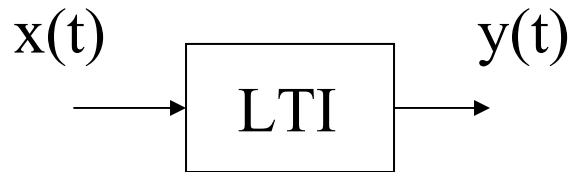
D : vertraging over tijd T

Continue-tijd LTI filter



$h(t)$: impulsantwoord

$H(f)$: transferfunctie



$$y(t) = (h(u) \otimes x(u))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)x(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du \quad (\text{convolutie})$$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Complexe laagdoorlaatvoorstelling van reëel banddoorlaatsignaal

$x_{BP}(t)$ is *reëel* banddoorlaatsignaal, met $X_{BP}(f) = 0$ voor $||f|-f_0| > B$ en $B < f_0$

$x_{BP}(t)$ kan voorgesteld worden als

$$\begin{aligned}x_{BP}(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re}[x_{LP}(t)e^{j2\pi f_0 t}] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} x_{LP}(t)e^{j2\pi f_0 t} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{LP}^*(t)e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= \sqrt{2}x_R(t)\cos(2\pi f_0 t) - \sqrt{2}x_I(t)\sin(2\pi f_0 t)\end{aligned}$$

$x_{LP}(t) = x_R(t) + jx_I(t)$ is *complex* laagdoorlaatsignaal, met $X_{LP}(f) = 0$ voor $|f| > B$

In frequentiedomein :

$$X_{BP}(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} X_{LP}(f - f_0) + \frac{\sqrt{2}}{2} X_{LP}^*(-f - f_0)$$

Voorbeeld :

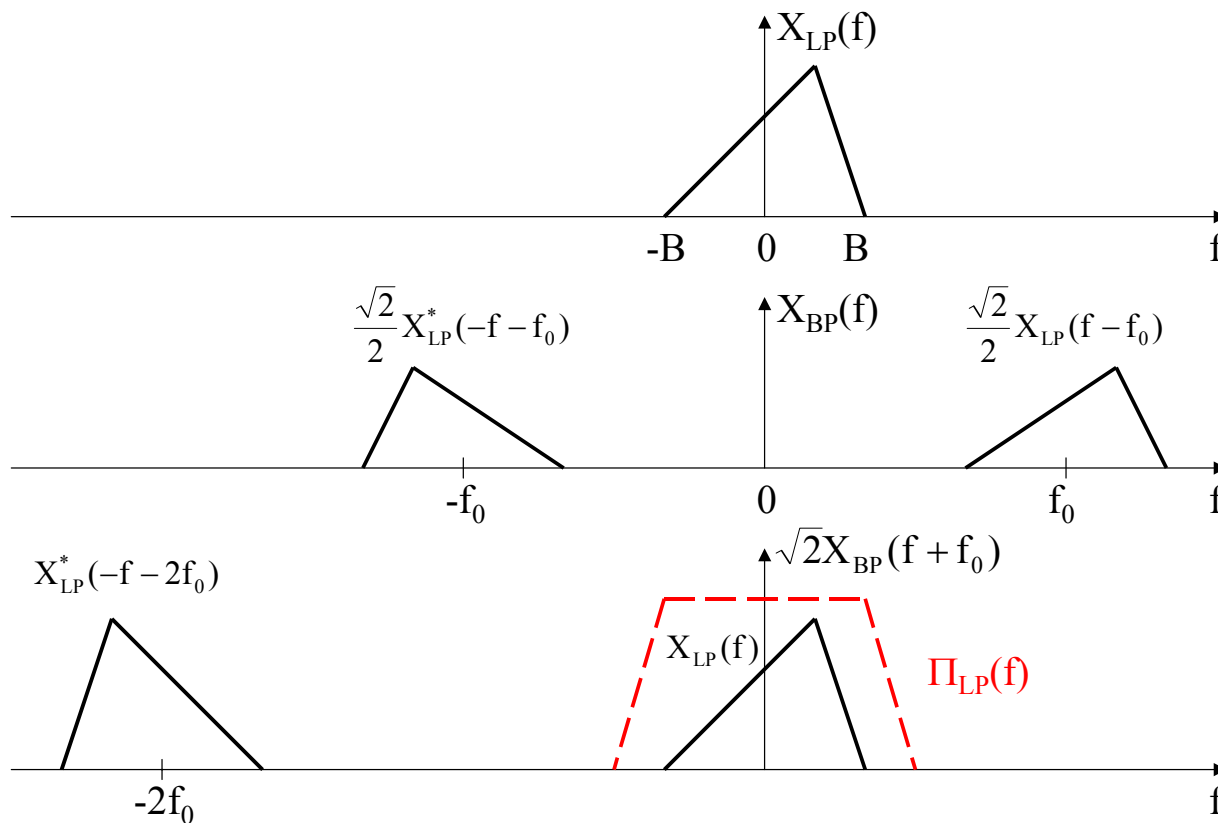
$$\begin{aligned}x_{BP}(t) &= \sqrt{2}A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \\ &= \sqrt{2}A \operatorname{Re}[e^{j\theta} e^{j2\pi f_0 t}]\end{aligned} \Rightarrow x_{LP}(t) = A e^{j\theta}$$

fasorvoorstelling
van sinusoiden

Complexe laagdoorlaatvoorstelling van reëel banddoorlaatsignaal

$$X_{BP}(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} X_{LP}(f - f_0) + \frac{\sqrt{2}}{2} X_{LP}^*(-f - f_0)$$

$$X_{LP}(f) = \sqrt{2} X_{BP}(f + f_0) \Pi_{LP}(f)$$



$\Pi_{LP}(f)$: heeft *reëel*
impulsantwoord $\pi_{LP}(t)$

$$\Pi_{LP}(f) = \Pi_{LP}^*(-f)$$

$$\Pi_{LP}(f) = 1, |f| < B$$

$$\Pi_{LP}(f) = 0, |f| > 2f_0 - B$$

meer hierover in
hoofdstuk 4

Probabiliteitstheorie : toevalsgrootheden, toevalsprocessen

Probabiliteitstheorie ??

Verschillende grootheden in de telecommunicatie zijn “afhankelijk van het toeval”, “random”, “stochastisch” vanuit het standpunt van de ontvanger :

- de te versturen informatie, het uitgezonden signaal
- stoorsignalen (ruis, interferentie)

Deze grootheden worden gemodelleerd aan de hand van probabiliteitstheorie

Toevalsgrootheden (TGn)

Toevalsexperiment

resultaat ω , in resultatenruimte Ω

Ω : eindige verzameling, aftelbaar oneindige verzameling, of continuüm

Toevalsgrootheden (TGn)

$\omega \rightarrow (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$: hangt af van toeval (resultaat ω)

Discrete TGn : nemen eindig (of aftelbaar oneindig) aantal waarden aan

Continue TGn : nemen een continuüm aan waarden aan

TGn zijn reëel- of complexwaardig

TGn : voorbeeld



$$\Omega = \{0, 1, \dots, 36\}$$

$X_n(\omega)$: opbrengst n-de speler

	0						
PASSE	1	2	3	MANQUE			
	4	5	6				
	7	8	9				
PAIR	10	11	12	IMPAIR			
	13	14	15				
	16	17	18				
	19	20	21				
◆	22	23	24	◆			
	25	26	27				
	28	29	30				
	31	32	33				
	34	35	36				
12 ^P	12 ^M	12 ^D			12 ^D	12 ^M	12 ^P

Stochastische signalen (TPn)

Toevalsexperiment

resultaat ω , in resultatenruimte Ω

Ω : eindige verzameling, aftelbaar oneindige verzameling, of continuüm

Stochastisch signaal is een toevalsproces (TP)

$\omega \rightarrow X(t; \omega)$ functie van de *tijd* (t) en van het *toeval* (ω)

bij gegeven ω : $X(t; \omega)$ is een *exemplaar* van het TP (functie van t)

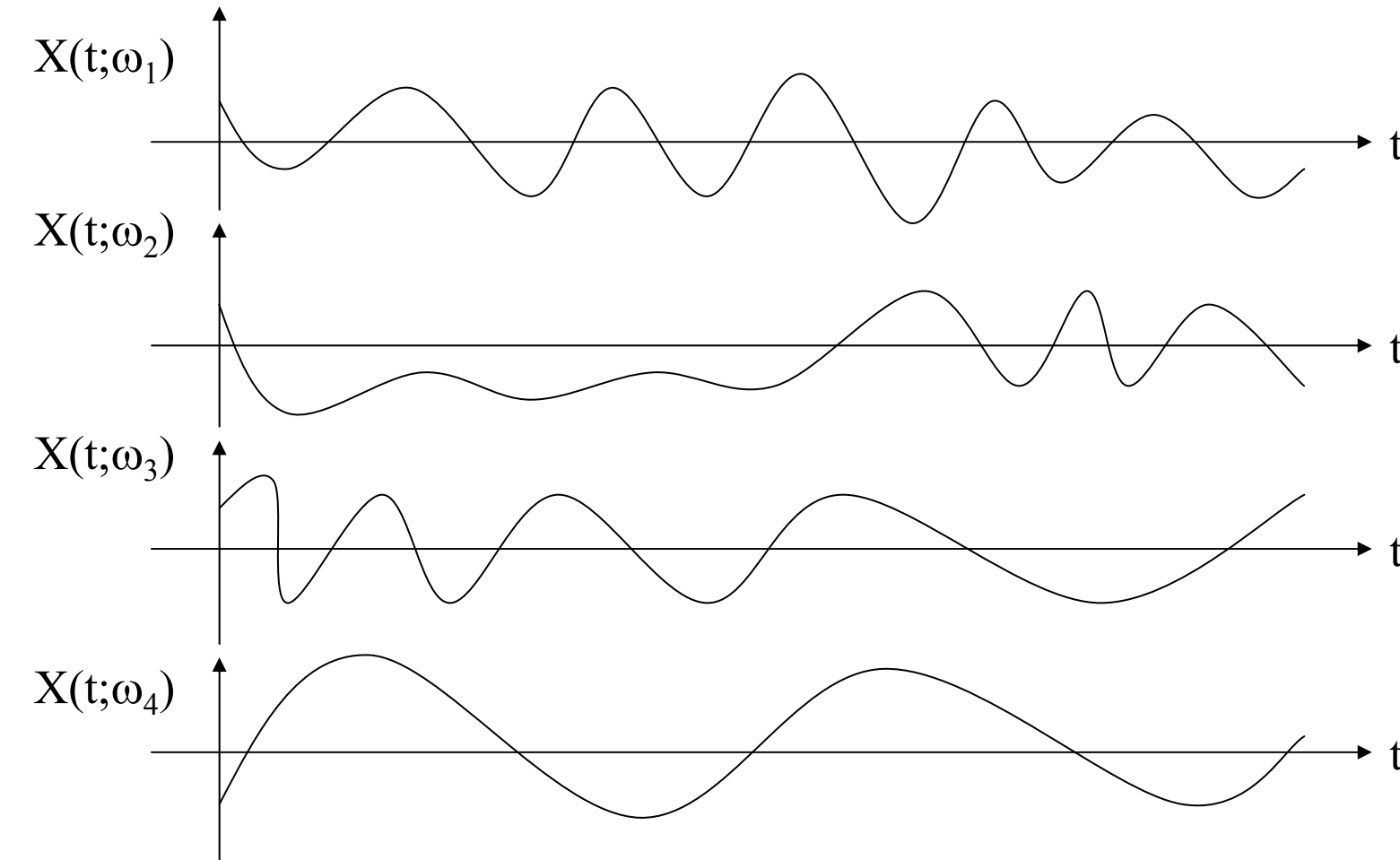
ensemble : verzameling van alle mogelijke exemplaren

bij gegeven t : $X(t; \omega)$ is een TG (functie van ω)

(tijd kan ook discreet zijn : $\{X(k; \omega)\}$)

Stochastische signalen (TPn)

Ensemble van exemplaren van TP



Stochastische signalen : voorbeeld 1

muziek gegenereerd door het toeval



pianoklavier :
36 (Z) + 52 (W)
= 88 toetsen

duurtijden :
1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16

Toevalsexperiment :

- schrijf alle combinaties van een muzieknoot en zijn duurtijd op briefjes (88 noten x 5 duurtijden = 440 briefjes)
- trek K keer willekeurig een briefje (getrokken briefje terugleggen)
- speel de combinatie van K muzieknooten op de piano

440^K mogelijke combinaties van K muzieknooten

Stochastische signalen : voorbeeld 2

M-PAM ($M = 2^m$)

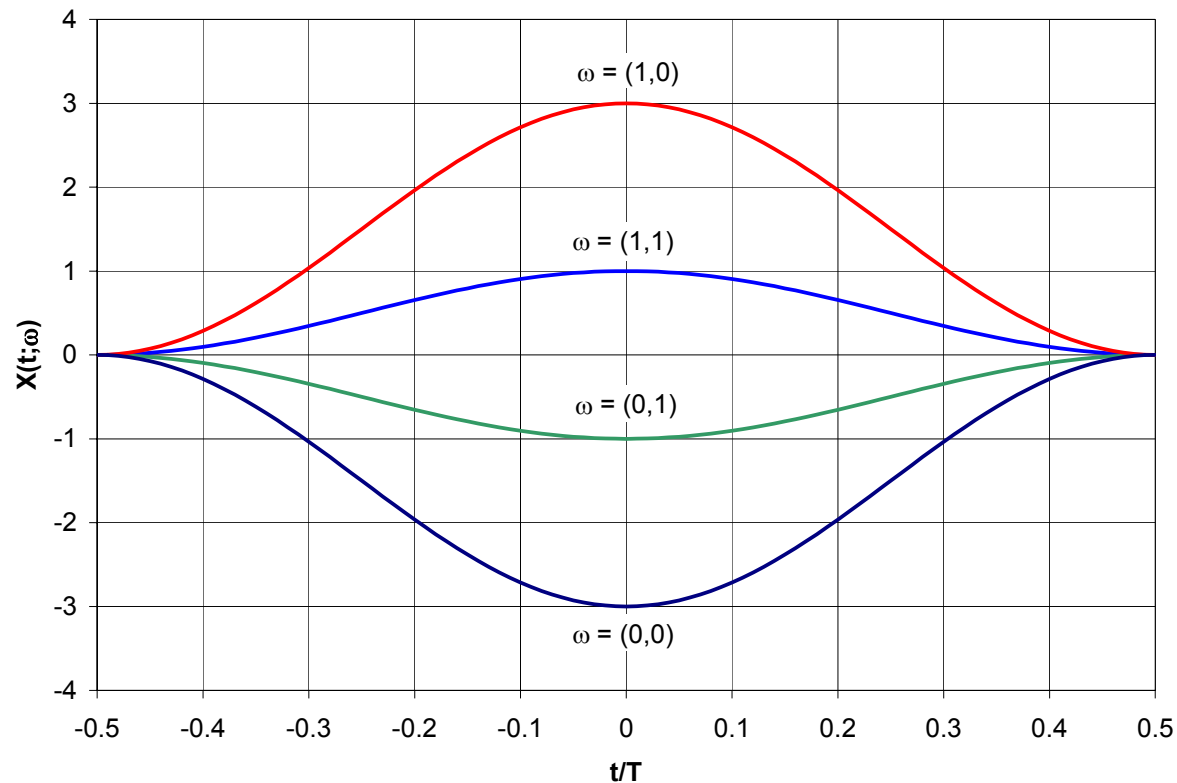
$$X(t;\omega) = a_0(\omega)p_{tr}(t) \quad a_0(\omega) \in \{-(M-1)\Delta, -(M-3)\Delta, \dots, (M-3)\Delta, (M-1)\Delta\}$$

(voorstelling van m bits)

$M = 4$ ($m=2$) :

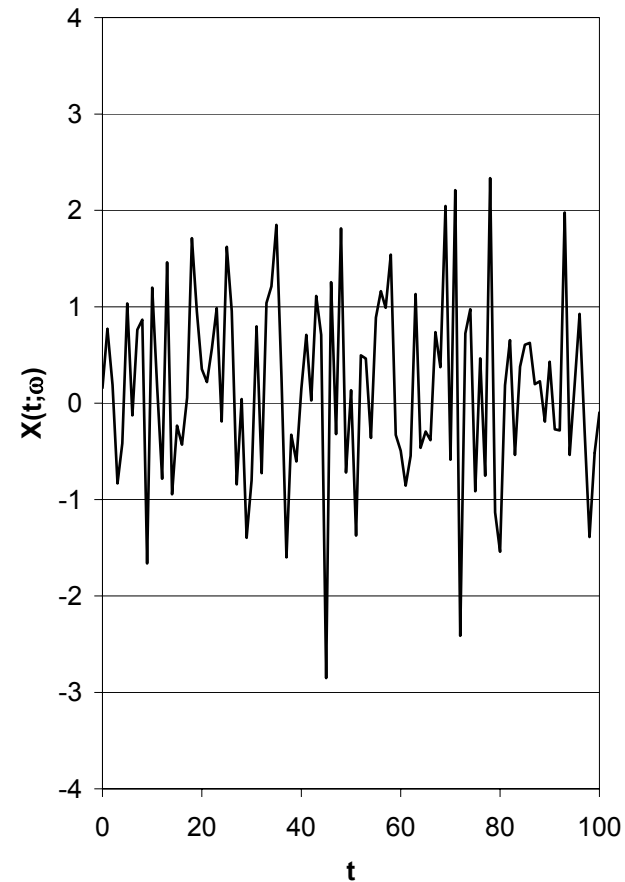
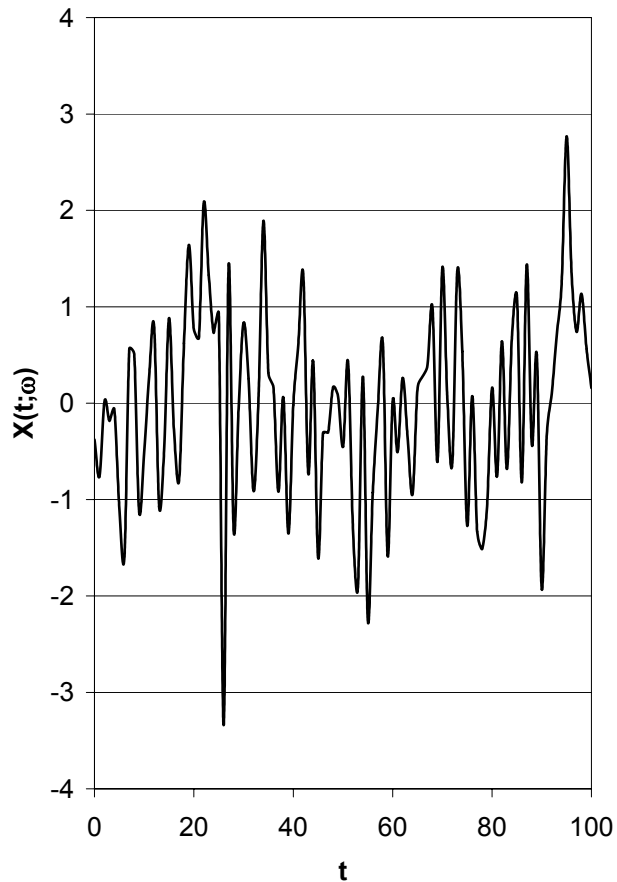
bits	a_0
00	-3
01	-1
10	3
11	1

dit ensemble bestaat uit slechts 4 exemplaren



Stochastische signalen : voorbeeld 3

witte Gaussiaanse ruis (stoorsignaal)
(2 exemplaren uit een continuüm aan exemplaren)



Distributies van TGn

Karakteriseren van twee TGn $X(\omega)$ en $Y(\omega)$

$X(\omega)$ en $Y(\omega)$ *discreet* (nemen eindig of aftelbaar oneindig aantal (reële of complexe) waarden aan) : gezamenlijke *massafunctie* $p_{X,Y}(x,y)$

$$p_{X,Y}(x,y) = \Pr[X(\omega) = x, Y(\omega) = y]$$

$X(\omega)$ en $Y(\omega)$ *continu* : gezamenlijke *densiteit* $f_{X,Y}(x,y)$

$X(\omega)$ en $Y(\omega)$ reëelwaardig :

$$f_{X,Y}(x,y) = \Pr[X(\omega) \in (x, x+dx), Y(\omega) \in (y, y+dy)]/|dx dy|$$

$X(\omega)$ en $Y(\omega)$ complexwaardig :

$$X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega), Y(\omega) = Y_R(\omega) + jY_I(\omega)$$

$$f_{X,Y}(x_R + jx_I, y_R + jy_I) = f_{X_R, X_I, Y_R, Y_I}(x_R, x_I, y_R, y_I)$$

Distributies van TPn

Karakterisatie van $X(t;\omega)$ op tijdstippen t_1 en t_2

$p_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$: massafunctie van $(X(t_1; \omega), X(t_2; \omega))$ (discreet TP)

$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$: densiteit van $(X(t_1; \omega), X(t_2; \omega))$ (continu TP)

Karakterisatie van $X(t; \omega)$ en $Y(t; \omega)$ op respectieve tijdstippen t_1 en t_2

$p_{X,Y}(x, y; t_1, t_2) =$ massafunctie van $(X(t_1; \omega), Y(t_2; \omega))$ (discrete TPn)

$f_{X,Y}(x, y; t_1, t_2) =$ densiteit van $(X(t_1; \omega), Y(t_2; \omega))$ (continue TPn)

(gelijkaardige definities voor discrete-tijd TPn)

Verwachtingswaarde van een functie van TPn

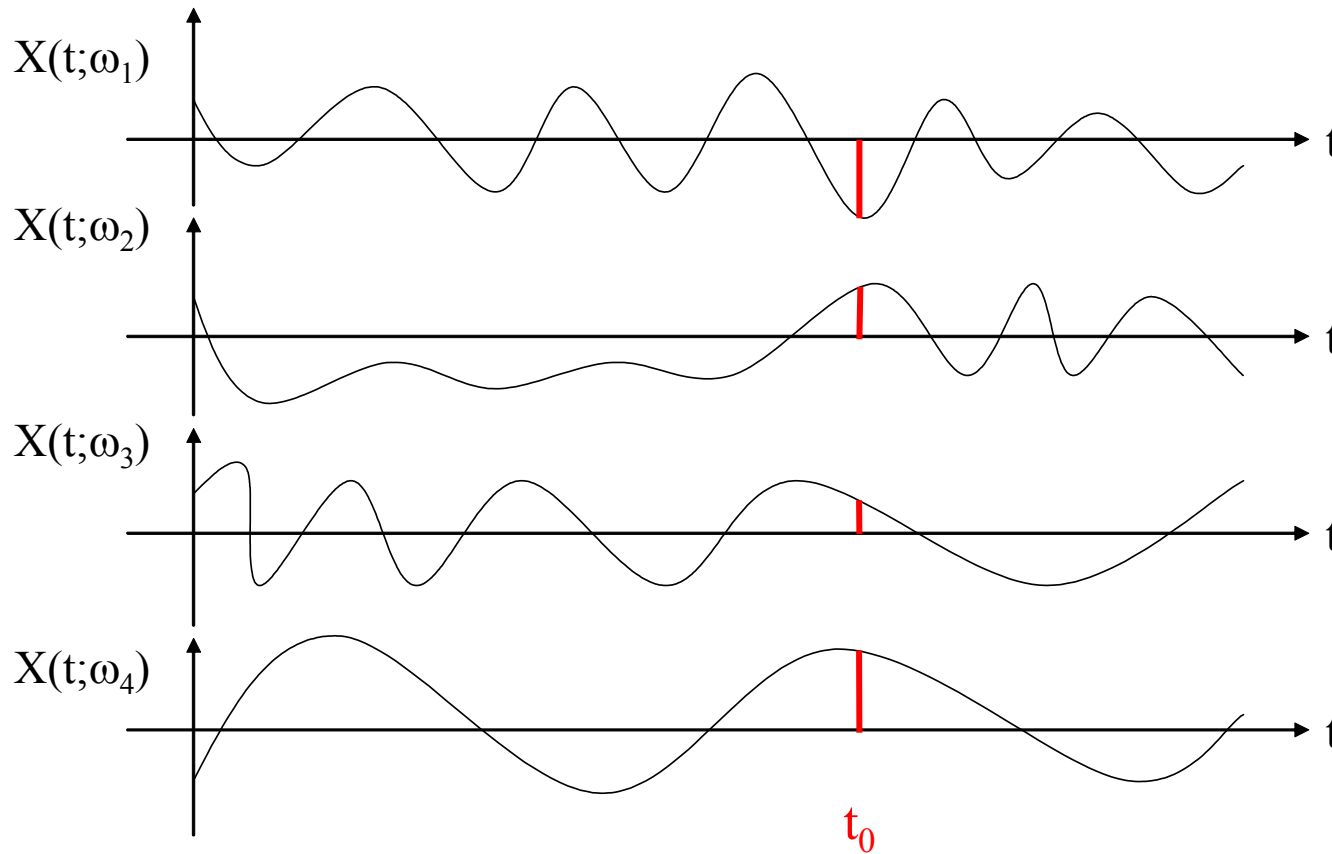
$$E[g(X(t_1; \omega), X(t_2; \omega))] = \begin{cases} \sum_{x_1, x_2} g(x_1, x_2) p_X(x_1, x_2; t_1, t_2) & \text{(discreet TP)} \\ \int g(x_1, x_2) f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 & \text{(continu TP)} \end{cases}$$

$$E[g(X(t_1; \omega), Y(t_2; \omega))] = \begin{cases} \sum_{x, y} g(x, y) p_{X,Y}(x, y; t_1, t_2) & \text{(discrete TPn)} \\ \int g(x, y) f_{X,Y}(x, y; t_1, t_2) dx dy & \text{(continue TPn)} \end{cases}$$

Moment van eerste orde

statistisch gemiddelde (verwachtingswaarde)

$$\mu_X(t) = E[X(t; \omega)]$$



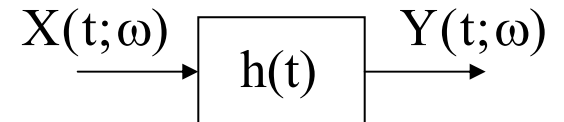
$$\mu_X(t_0) = E[X(t_0; \omega)]$$

Moment van eerste orde

$\Delta X(t; \omega) = X(t; \omega) - \mu_X(t)$ fluctuatie van $X(t; \omega)$ t.o.v. verwachtingswaarde $\mu_X(t)$

$X(t; \omega)$ ontbinden als $X(t; \omega) = \mu_X(t) + \Delta X(t; \omega)$ met $E[\Delta X(t; \omega)] = 0$

voorbeeld : statistisch gemiddelde van gefilterd signaal



$$Y(t; \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)\mu_X(u)du + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)\Delta X(u; \omega)du$$

$$E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)\Delta X(u; \omega)du \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)E[\Delta X(u; \omega)]du = 0$$

$$\Rightarrow \mu_Y(t) = E[Y(t; \omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)\mu_X(u)du$$

Momenten van tweede orde

statistische autocorrelatiefunctie : $R_X(u,t) = E[X(t+u;\omega)X^*(t;\omega)]$

statistische kruiscorrelatiefunctie : $R_{X,Y}(u,t) = E[X(t+u;\omega)Y^*(t;\omega)]$

statistische autocovariantiefunctie :

$$\text{Cov}_X(u,t) = E[\Delta X(t+u;\omega)\Delta X^*(t;\omega)]$$

$$\Delta X(t;\omega) = X(t;\omega) - \mu_X(t)$$

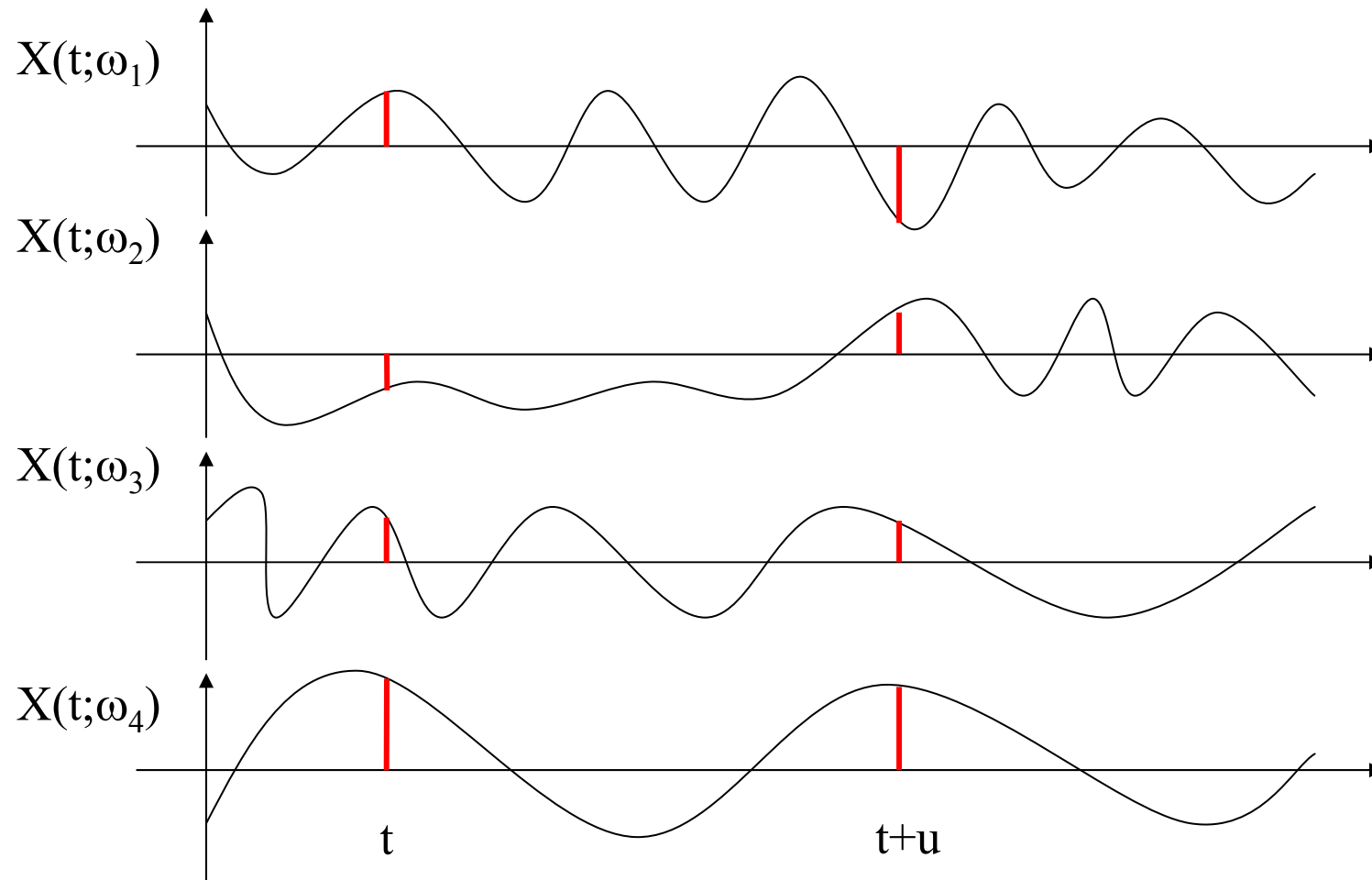
$$\Delta Y(t;\omega) = Y(t;\omega) - \mu_Y(t)$$

statistische kruiscovariantiefunctie :

$$\text{Cov}_{X,Y}(u,t) = E[\Delta X(t+u;\omega)\Delta Y^*(t;\omega)]$$

$$\text{variantie : } \sigma_X^2(t) = E[|\Delta X(t;\omega)|^2] = \text{Cov}_X(0,t)$$

Momenten van tweede orde



$$R_X(u, t) = E[X(t+u; \omega)X^*(t; \omega)]$$

Stationaire toevalsprocessen

$X(t;\omega)$ is **stationair** wanneer $X(t;\omega)$ en $X(t-\tau;\omega)$ dezelfde statistische eigenschappen hebben, ongeacht de waarde van τ .

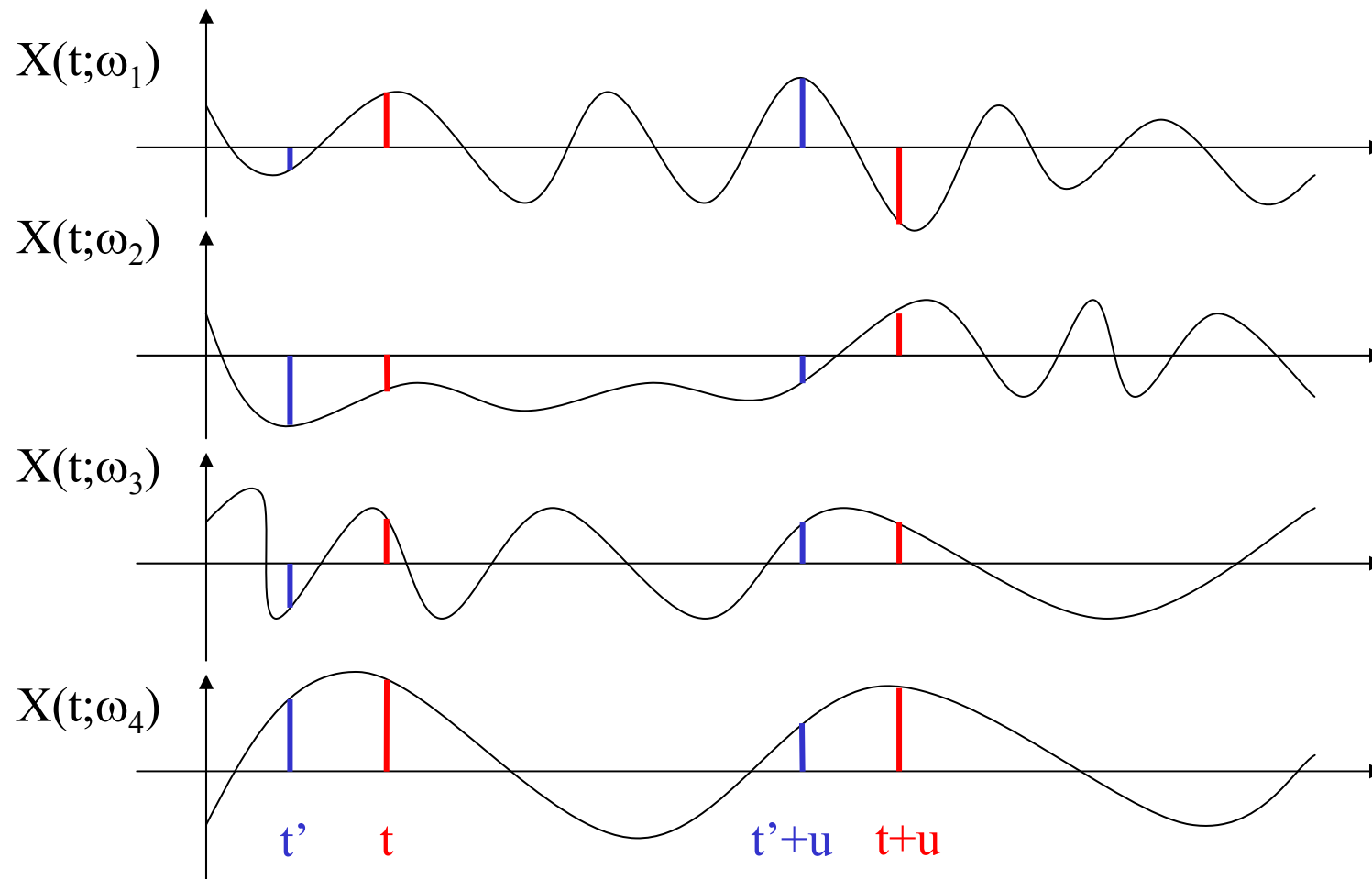
$$\mu_X(t) = \mu_X \quad \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2 \quad \text{onafhankelijk van tijdstip } t$$

$$\begin{aligned} R_X(u,t) &= R_X(u) \\ \text{Cov}_X(u,t) &= \text{Cov}_X(u) \end{aligned} \quad \text{enkel afhankelijk van tijdverschil } u$$

$X(t;\omega)$ en $Y(t;\omega)$ zijn gezamenlijk stationair wanneer $(X(t;\omega), Y(t;\omega))$ en $(X(t-\tau;\omega), Y(t-\tau;\omega))$ dezelfde statistische eigenschappen hebben, ongeacht de waarde van τ .

$$\begin{aligned} R_{X,Y}(u,t) &= R_{X,Y}(u) \\ \text{Cov}_{X,Y}(u,t) &= \text{Cov}_{X,Y}(u) \end{aligned} \quad \text{enkel afhankelijk van tijdverschil } u$$

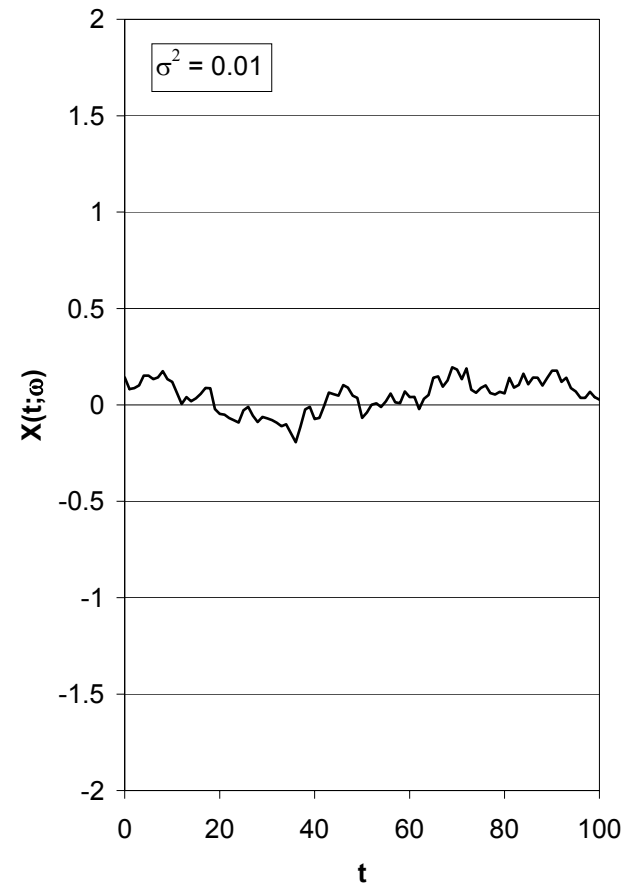
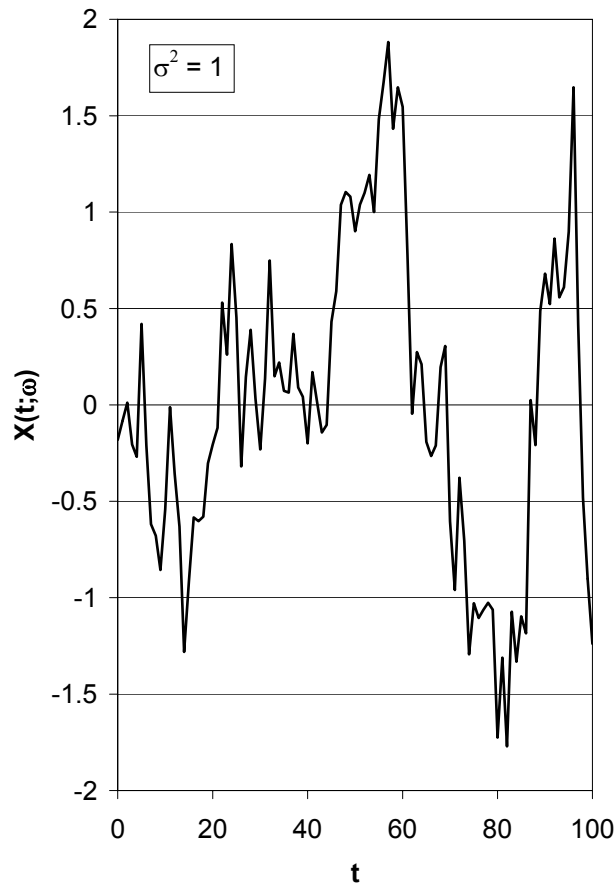
Stationaire toevalsprocessen



$$\mu_X = E[X(t; \omega)] \text{ en } R_X(u) = E[X(t+u; \omega)X^*(t; \omega)] : \text{onafh. van } t$$

Stationaire toevalsprocessen

Interpretatie van **variantie** $\sigma_X^2 = E[|X(t; \omega) - \mu_X|^2]$



Stationaire toevalsprocessen

Interpretatie van **statistische autocorrelatiefunctie**

$$E[(X(t;\omega)-X(t-u;\omega))^2] = 2(R_X(0)-R_X(u)) \geq 0 \quad (X(t;\omega) \text{ reëelwaardig})$$
$$(\Rightarrow R_X(u) \leq R_X(0))$$

$R_X(u)$ geeft in welke mate $X(t-u;\omega)$ gelijk op $X(t;\omega)$

Voor welke u geldt $E[(X(t;\omega)-X(t-u;\omega))^2] \leq \varepsilon E[X^2(t;\omega)]$?



$$2(R_X(0)-R_X(u)) \leq \varepsilon R_X(0) \quad \text{dus} \quad (1 - \varepsilon/2)R_X(0) \leq R_X(u) \leq R_X(0)$$

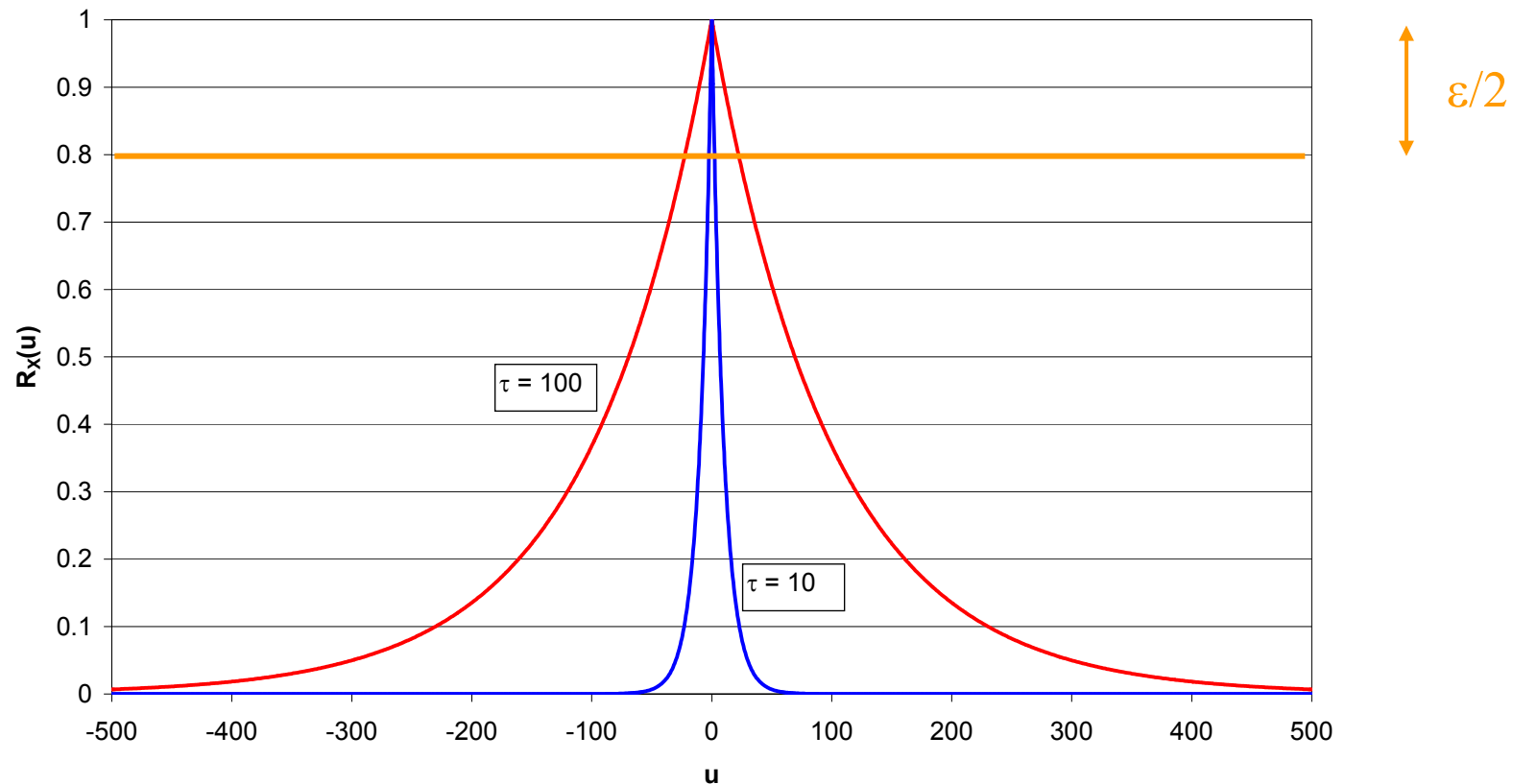


$$|u| \leq u_0 \quad \text{met } u_0 \text{ kleinste waarde die voldoet aan } R_X(u_0) = (1 - \varepsilon/2)R_X(0)$$

Stationaire toevalsprocessen

Interpretatie van **statistische autocorrelatiefunctie**

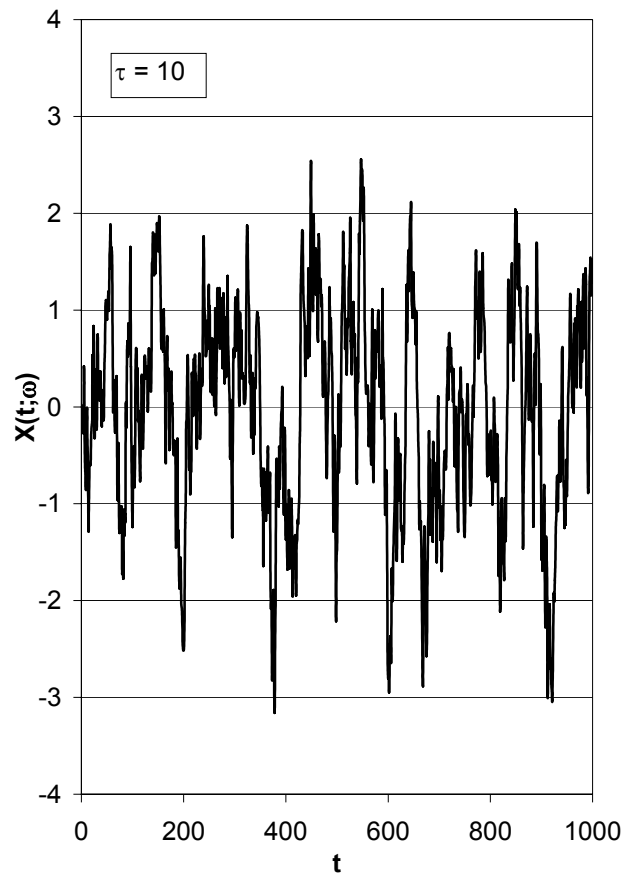
voorbeeld : $R_x(u) = \exp(-|u|/\tau) \Rightarrow u_0 = \tau \ln(1/(1 - \varepsilon/2)) \propto \tau$



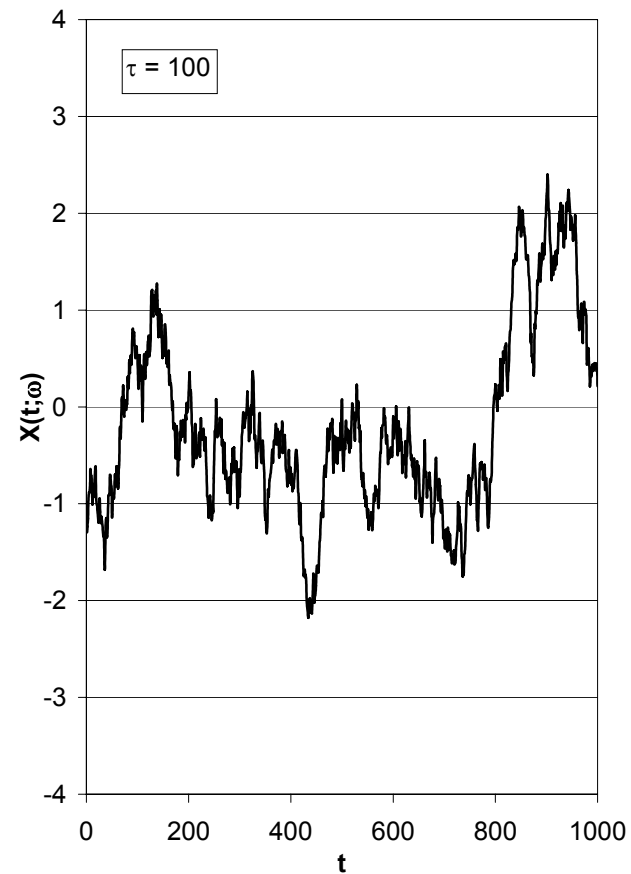
Stationaire toevalsprocessen

Interpretatie van statistische autocorrelatiefunctie $R_x(u) = \exp(-u/\tau)$

(snellere variaties)



(tragere variaties)



Signalen met eindige energie

Energie deterministisch signaal

signaal : $x(t) \leftrightarrow X(f)$

$$\text{energie : } E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

opdat E_x zou eindig zijn, moet $x(t)$ uitsterven voor grote $|t|$

($x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ heeft dus een oneindig grote energie)

Berekening in frequentiedomain : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$ (wegens Parseval)

Energie stochastisch signaal

signaal : $x(t;\omega) \leftrightarrow X(f;\omega)$

Statistisch gemiddelde van energie van een exemplaar

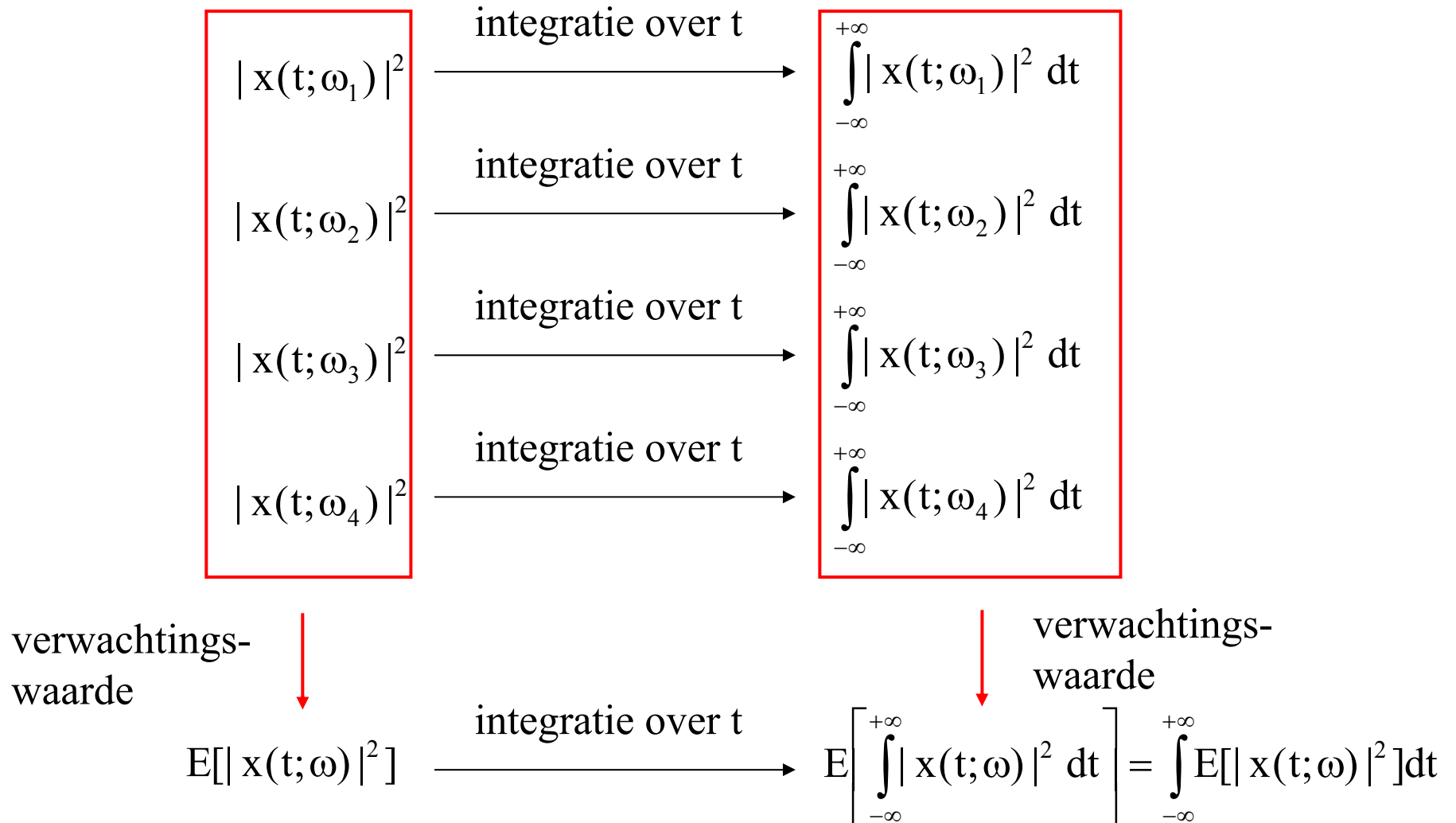
$$E_x = E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t;\omega)|^2 dt \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[|x(t;\omega)|^2] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(0,t) dt$$

opdat E_x zou eindig zijn, moet $R_x(0,t)$ uitsterven voor grote $|t|$
 \Rightarrow stationair TP heeft oneindige energie ($R_x(0,t) = R_x(0)$ sterft niet uit)

Berekening in frequentiedomein :

$$E_x = E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f;\omega)|^2 df \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[|X(f;\omega)|^2] df$$

Energie stochastisch signaal



Energiespectrum : deterministisch signaal

$|X(f)|^2$: **energiespectrum** (spectrale energiedichtheid) van $x(t)$

energie in (f_1, f_2) : $\int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$ $|X(f)|^2 df$: energie in $(f, f+df)$

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$ energie is integraal van
energiespectrum over alle f

Energiespectrum : stochastisch signaal

energiespectrum : $E[|X(f;\omega)|^2]$

statistisch gemiddelde van
energiespectrum van exemplaren

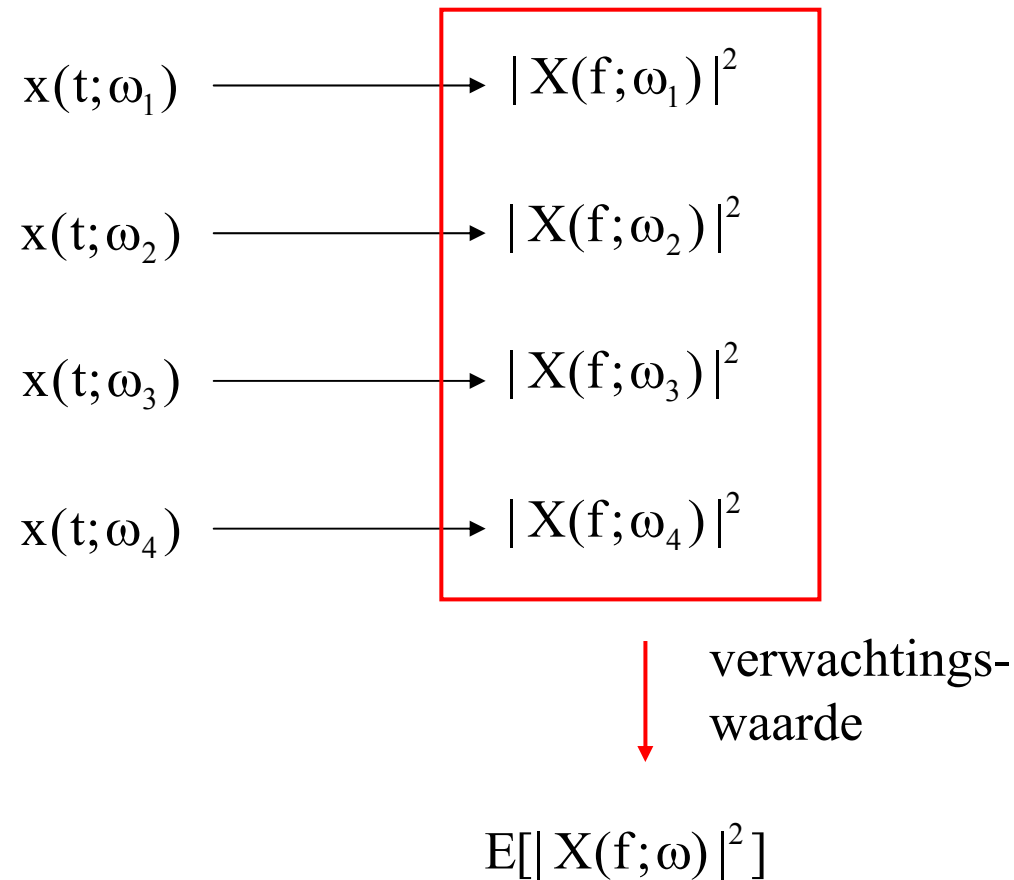
energie in (f_1, f_2) : $\int_{f_1}^{f_2} E[|X(f)|^2]df$

$E[|X(f)|^2]df$: energie in $(f, f+df)$

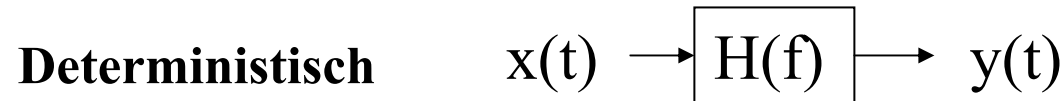
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} E[|X(f)|^2]df$$

energie is integraal van
energiespectrum over alle f

Energiespectrum : stochastisch signaal

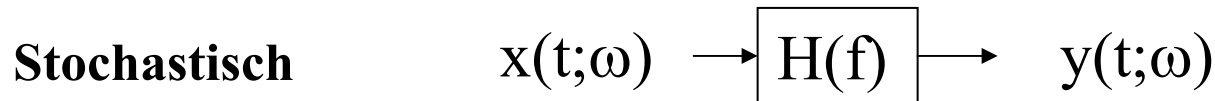


Energiespectrum van gefilterd signaal



energiespectrum :

$$\underbrace{|Y(f)|^2}_{\text{spectrum uitgang}} = |H(f)|^2 \underbrace{|X(f)|^2}_{\text{spectrum ingang}}$$



energiespectrum :

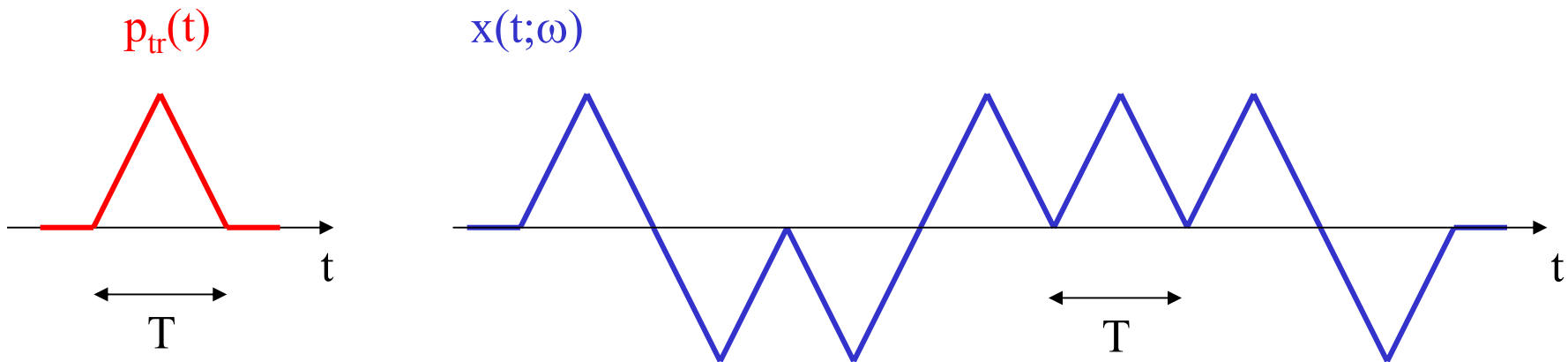
$$\underbrace{E[|Y(f;\omega)|^2]}_{\text{spectrum uitgang}} = |H(f)|^2 \underbrace{E[|X(f;\omega)|^2]}_{\text{spectrum ingang}}$$

$|H(f)|^2$: **energietransferfunctie**

Voorbeeld : M-PAM (1)

$$x(t; \omega) = \sum_{k=-K}^K a(k; \omega) p_{tr}(t - kT)$$

$x(t; \omega)$: som van $2K+1$ verschoven pulsen, k -de puls heeft amplitude $a(k; \omega)$



$$E[a(k+m)a^*(k)] = \sigma_a^2 \delta(m)$$

$$E[|X(f; \omega)|^2] = (2K+1)\sigma_a^2 |P_{tr}(f)|^2$$

Permanente signalen : Tijdsgemiddelde en Ergodiciteit

Permanente signalen

Permanente signalen sterven niet uit. Hun energie is dus oneindig groot

Voorbeelden

- 1) permanent deterministisch signaal : $x(t)$ is periodiek
- 2) permanent stochastisch signaal : $x(t;\omega)$ is stationair

Tijdsgemiddelde

Deterministische signalen

tijdsgemiddelde van $x(t)$ over oneindig interval

$$m_x = \langle x(t) \rangle_t = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$$

tijdsautocorrelatiefunctie : $r_x(u) = \langle x(t+u)x^*(t) \rangle_t$

Stochastische signalen

tijdsgemiddelde van een exemplaar $x(t; \omega)$ over oneindig interval

$$m_x(\omega) = \langle x(t; \omega) \rangle_t = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t; \omega) dt$$

tijdsautocorrelatiefunctie van exemplaar : $r_x(u; \omega) = \langle x(t+u; \omega)x^*(t; \omega) \rangle_t$

Tijdsgemiddelde van een *stationair* TP

Ergodiciteit

Stel : $x(t;\omega)$ is stationair, met $E[x(t;\omega)] = \mu_x$ (hangt niet af van t)

tijdsgemiddelde van exemplaar is toevalsgrootheid $m_x(\omega) = \langle x(t;\omega) \rangle_t$

uitmiddelen over de exemplaren

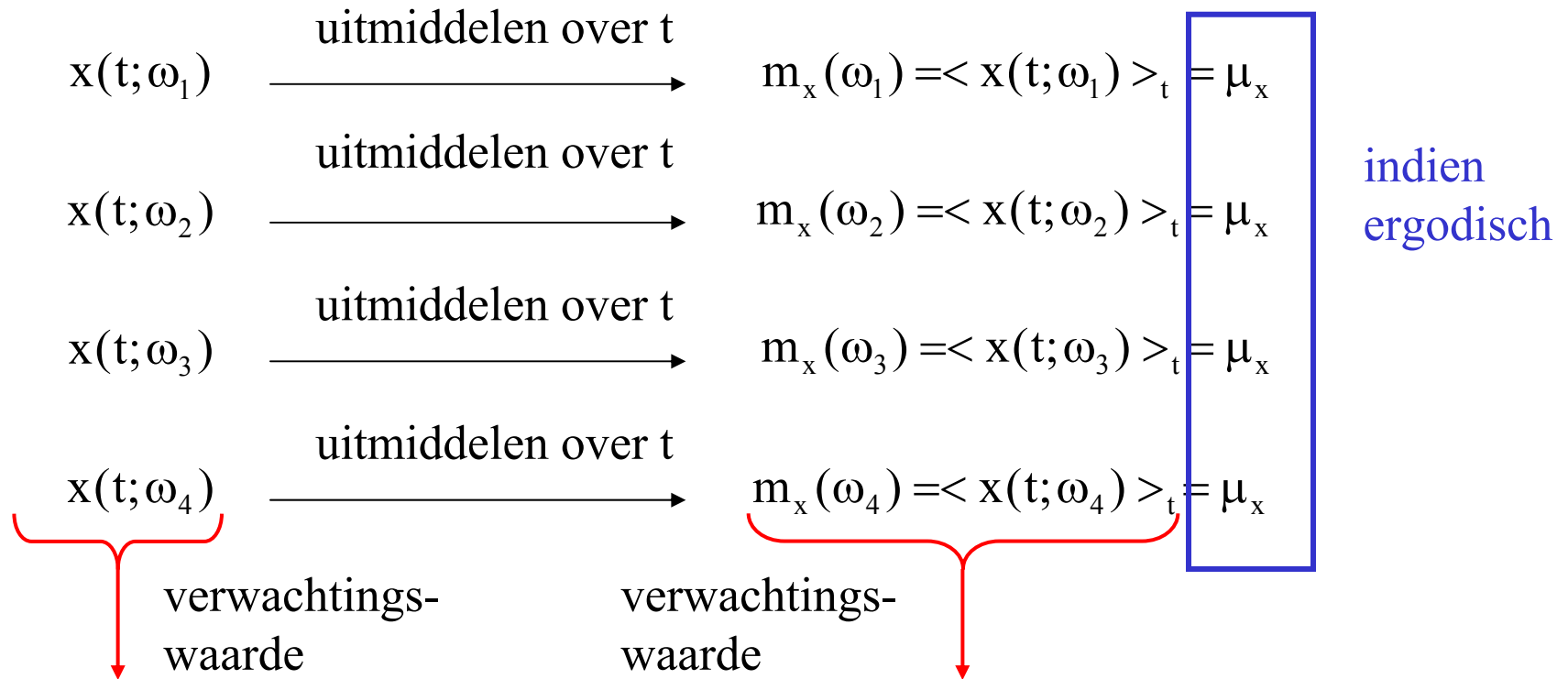
$$E[m_x(\omega)] = E[\langle x(t;\omega) \rangle_t] = \langle E[x(t;\omega)] \rangle_t = \langle \mu_x \rangle_t = \mu_x$$

Indien $x(t;\omega)$ “*ergodisch*” : $m_x(\omega) = \mu_x$

tijdsgemiddelde van een exemplaar hangt nu niet meer af van het toeval !!!
statistisch gemiddelde gelijk aan tijdsgemiddelde van 1 exemplaar !!!

ergodiciteit geldt wanneer $\text{Cov}_x(u) \rightarrow 0$ voor $|u| \rightarrow \infty$
(m.a.w, $x(t)$ en $x(t+u)$ ongecorreleerd voor $|u| \rightarrow \infty$)

Tijdsgemiddelde van een *stationair* TP - Ergodiciteit



$$\mu_x = E[x(t; \omega)]$$

(onafh. van t wegens
stationariteit)

$$E[\langle x(t; \omega) \rangle_t] = \langle E[x(t; \omega)] \rangle_t = \langle \mu_x \rangle_t = \mu_x$$

Tijdsrelatiefunctie *stationair* TP - Ergodiciteit

tijdsautocorrelatiefunctie : $r_x(u;\omega) = \langle x(t+u;\omega) x^*(t;\omega) \rangle_t$

tijds kruiscorrelatiefunctie : $r_{x,y}(u;\omega) = \langle x(t+u;\omega) y^*(t;\omega) \rangle_t$

$$\begin{aligned} E[r_x(u;\omega)] &= \langle E[x(t+u;\omega) x^*(t;\omega)] \rangle_t \\ &= \langle R_x(u) \rangle_t = R_x(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[r_{x,y}(u;\omega)] &= \langle E[x(t+u;\omega) y^*(t;\omega)] \rangle_t \\ &= \langle R_{x,y}(u) \rangle_t = R_{x,y}(u) \end{aligned}$$

Indien ergodisch :

$$r_x(u;\omega) = R_x(u)$$

$$r_{x,y}(u;\omega) = R_{x,y}(u)$$

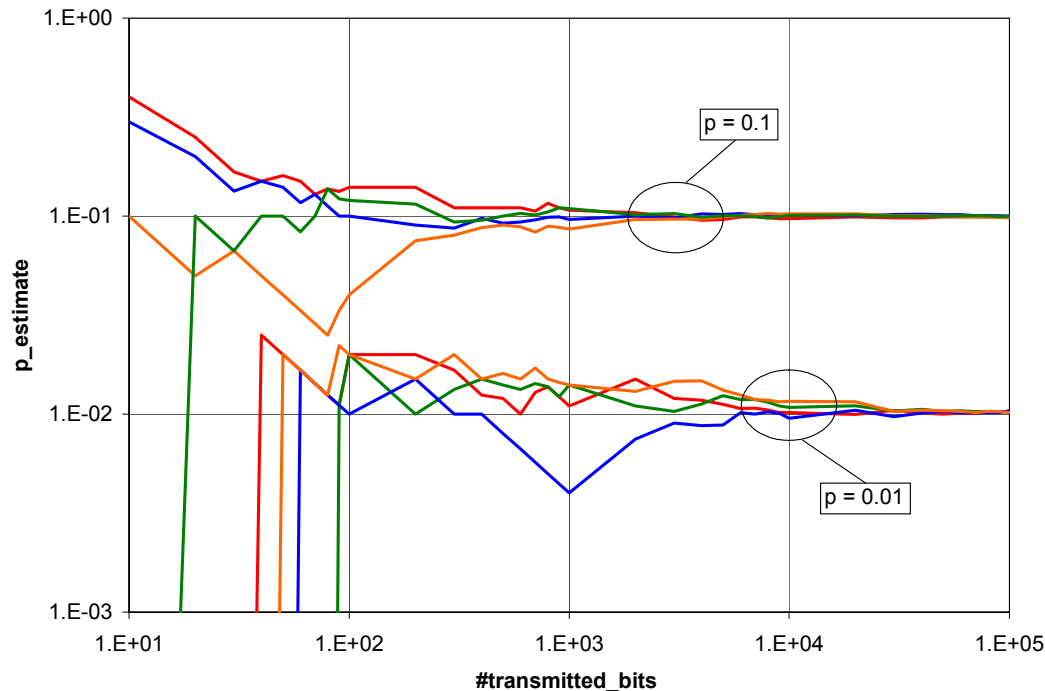
tijdsrelatiefuncties hangen niet nu meer af van het toeval !!!

statistische correlatiefunctie = tijdsrelatiefunctie van 1 exemplaar !!!

Ergodiciteit

Indien ergodiciteit : verwachtingswaarde van *stationair* TP is te berekenen als tijdsgemiddelde over één exemplaar.

Praktijk : tijdsgemiddelde berekenen over eindig (i.p.v. oneindig) interval
⇒ tijdsgemiddelde vertoont (kleine) statistische fluctuatie



Transmissie van bits over kanaal
Onafhankelijke bitfouten
met foutprobabiliteit p .

Grafiek : #bitfouten/#bits voor 4
realisaties van het kanaal

#bitfouten/#bits → p
als #bits → ∞

Permanente signalen : Vermogen, vermogenspectrum

Vermogen van deterministische signalen

1) ogenblikkelijk vermogen (op tijdstip t) : $|x(t)|^2$

2) (gemiddeld) vermogen (uitgemiddeld over oneindig lange tijd) :

$$P_x = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \langle |x(t)|^2 \rangle_t = r_x(0)$$

Vermogen van stochastische signalen

Berekening van ogenblikkelijk vermogen en gemiddeld vermogen van een exemplaar, gevolgd door verwachtingswaarde over de exemplaren

1) ogenblikkelijk vermogen (op tijdstip t)

$$E[|x(t; \omega)|^2] = R_x(0, t)$$

2) gemiddeld vermogen

$$P_x = E[\langle |x(t; \omega)|^2 \rangle_t] = \langle R_x(0, t) \rangle_t = E[r_x(0; \omega)]$$

Vermogenspectrum

$S_x(f)$: **vermogenspectrum** (spectrale vermogendichtheid)

$S_x(f)df$: vermogen in $(f, f+df)$ $\int_{f_1}^{f_2} S_x(f)df$: vermogen in (f_1, f_2)

Deterministische signalen

$\langle x(t+u)x^*(t) \rangle_t = r_x(u) \xrightarrow{\text{FT}} S_x(f)$ vermogenspectrum is FT
 $\xleftarrow{\text{IFT}}$ van tijdsautocorrelatiefunctie

Stochastische signalen

$E[\langle x(t+u; \omega)x^*(t; \omega) \rangle_t] = E[r_x(u; \omega)] \xrightarrow{\text{FT}} S_x(f)$
 $= \langle E[x(t+u; \omega)x^*(t; \omega)] \rangle_t = \langle R_x(u, t) \rangle_t \xleftarrow{\text{IFT}}$

vermogenspectrum is FT van verwachtingswaarde van tijdsautocorrelatiefunctie,
 of de FT van het tijdsgemiddelde van de statistische autocorrelatiefunctie

Vermogenspectrum $S_x(f)$

Vermogenspectrum van gefilterd signaal

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

$|H(f)|^2$: vermogentransferfunctie

Vermogen als integraal van spectrum

$$P_x = r_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

(gelijkaardige uitdrukkingen als bij energie en energiespectra)

Vermogen van *stationaire* TPn

1) ogenblikkelijk vermogen $E[|x(t;\omega)|^2] = R_x(0)$ *onafhankelijk* van t

2) gemiddeld vermogen $P_x = E[<|x(t;\omega)|^2>_t] = R_x(0) = E[r_x(0;\omega)]$

gelijk aan ogenblikkelijk vermogen

3) vermogenspectrum

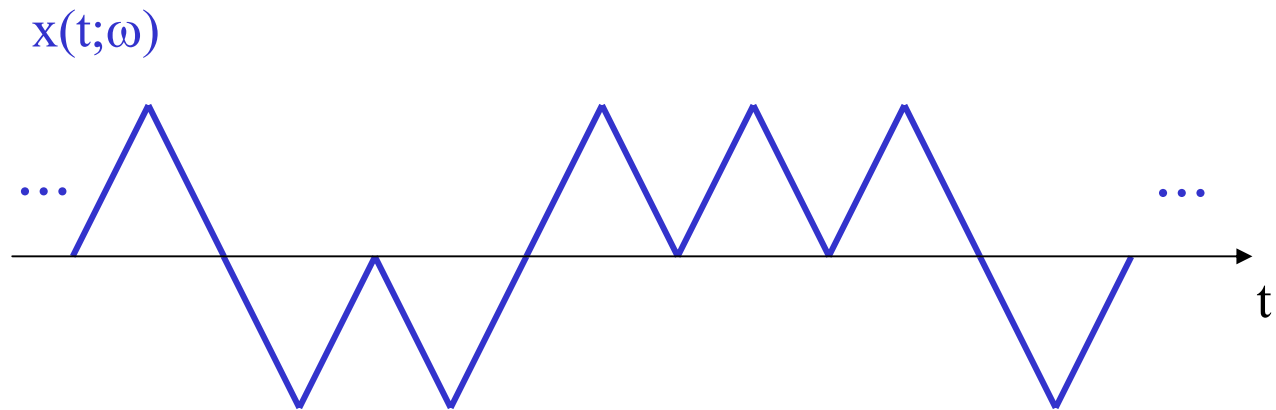
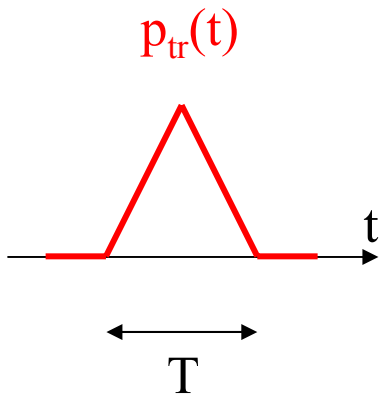
$E[r_x(u;\omega)] = R_x(u) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{IFT}} \end{array} S_x(f)$ vermogenspectrum $S_x(f)$ is FT van statistische autocorrelatiefunctie $R_x(u)$

4) indien ergodisch : $r_x(u;\omega) = R_x(u) \Rightarrow S_x(f)$ berekenen uit 1 exemplaar

Voorbeeld : M-PAM

$$x(t; \omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k; \omega) p_{tr}(t - kT)$$

$$R_a(m, k) = \sigma_a^2 \delta(m)$$



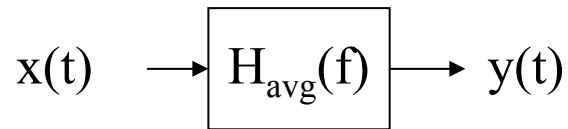
$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |P_{tr}(f)|^2$$

$$P_x = \frac{\sigma_a^2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \frac{\sigma_a^2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 dt$$

Praktische metingen van tijdsgemiddelde, vermogen, vermogenspectrum

Meting van tijdsgemiddelde (1)

Deterministisch signaal $x(t)$

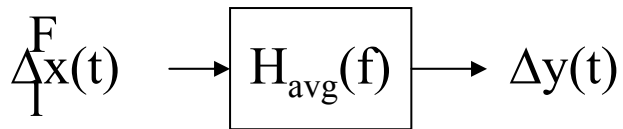
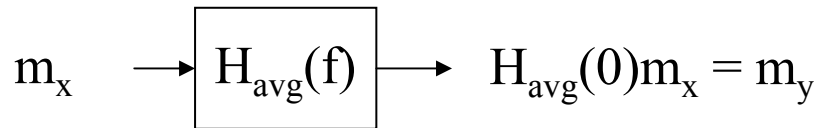


$$H_{\text{avg}}(0) = 1$$

$y(t)$ is “meting” van tijdsgemiddelde m_x van $x(t)$

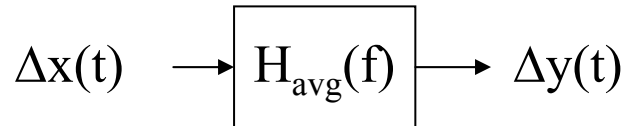
Ontbinden van $x(t)$ en $y(t)$: $x(t) = m_x + \Delta x(t)$ $y(t) = m_y + \Delta y(t)$

↑ tijdsgemiddelde ↓ fluctuatie, met tijdsgemiddelde = 0



$\Rightarrow x(t)$ en $y(t)$ hebben hetzelfde tijdsgemiddelde

Meting van tijdsgemiddelde (2)



vermogenspectra :

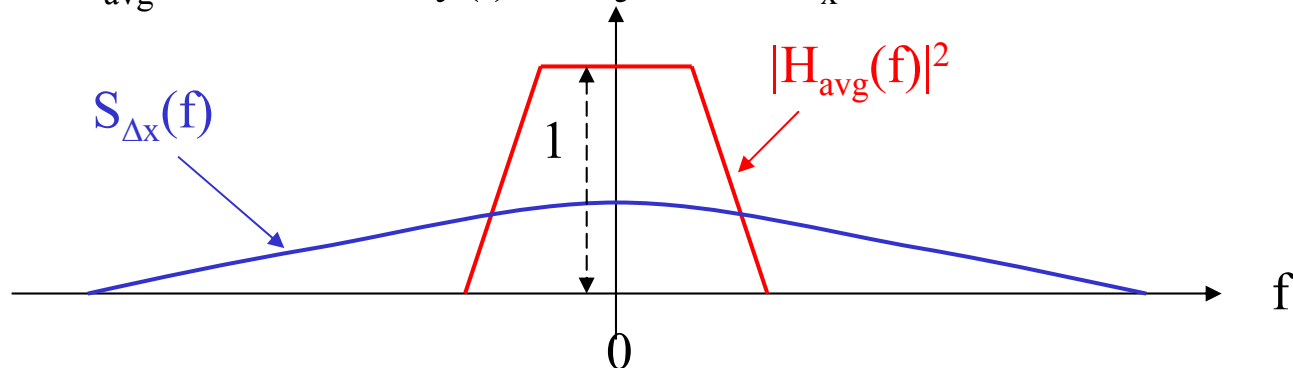
$$S_{\Delta y}(f) = |H_{\text{avg}}(f)|^2 S_{\Delta x}(f)$$

Vermogen van $\Delta y(t)$: $P_{\Delta y} = \langle |\Delta y(t)|^2 \rangle_t = \int |H_{\text{avg}}(f)|^2 S_{\Delta x}(f) df$

wanneer $B_{\text{avg}} \rightarrow 0$: $P_{\Delta y} \rightarrow 0$, dus $\Delta y(t) \rightarrow 0$ en $y(t) \rightarrow m_x$

Kies $B_{\text{avg}} \ll$ bandbreedte $x(t)$.

Hoe kleiner B_{avg} , hoe minder $y(t)$ afwijkt van m_x



Meting van tijdsgemiddelde (3)

Stochastisch signaal $x(t;\omega)$

$$x(t;\omega) \rightarrow \boxed{H_{\text{avg}}(f)} \rightarrow y(t;\omega) \quad H_{\text{avg}}(0) = 1 \quad \text{Kies } B_{\text{avg}} \ll \text{bandbreedte } x(t;\omega)$$

$$y(t;\omega) \approx m_x(\omega) = \langle x(t;\omega) \rangle_t \quad \text{tijdsgemiddelde van exemplaar } x(t;\omega)$$

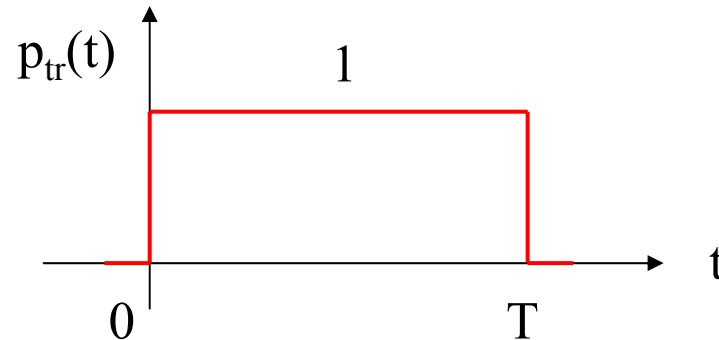
Indien stationair **ergodisch** proces :

$$y(t;\omega) \approx m_x(\omega) = \langle x(t;\omega) \rangle_t = E[x(t;\omega)] = \mu_x$$

Meting van tijdsgemiddelde (4)

Voorbeeld

$$x(t; \omega) = \sum_m a_m(\omega) p_{tr}(t - mT)$$



$\{a_m(\omega)\}$: statistisch onafhankelijke symbolen $\Pr[a_m(\omega) = 1] = \Pr[a_m(\omega) = 0] = \frac{1}{2}$

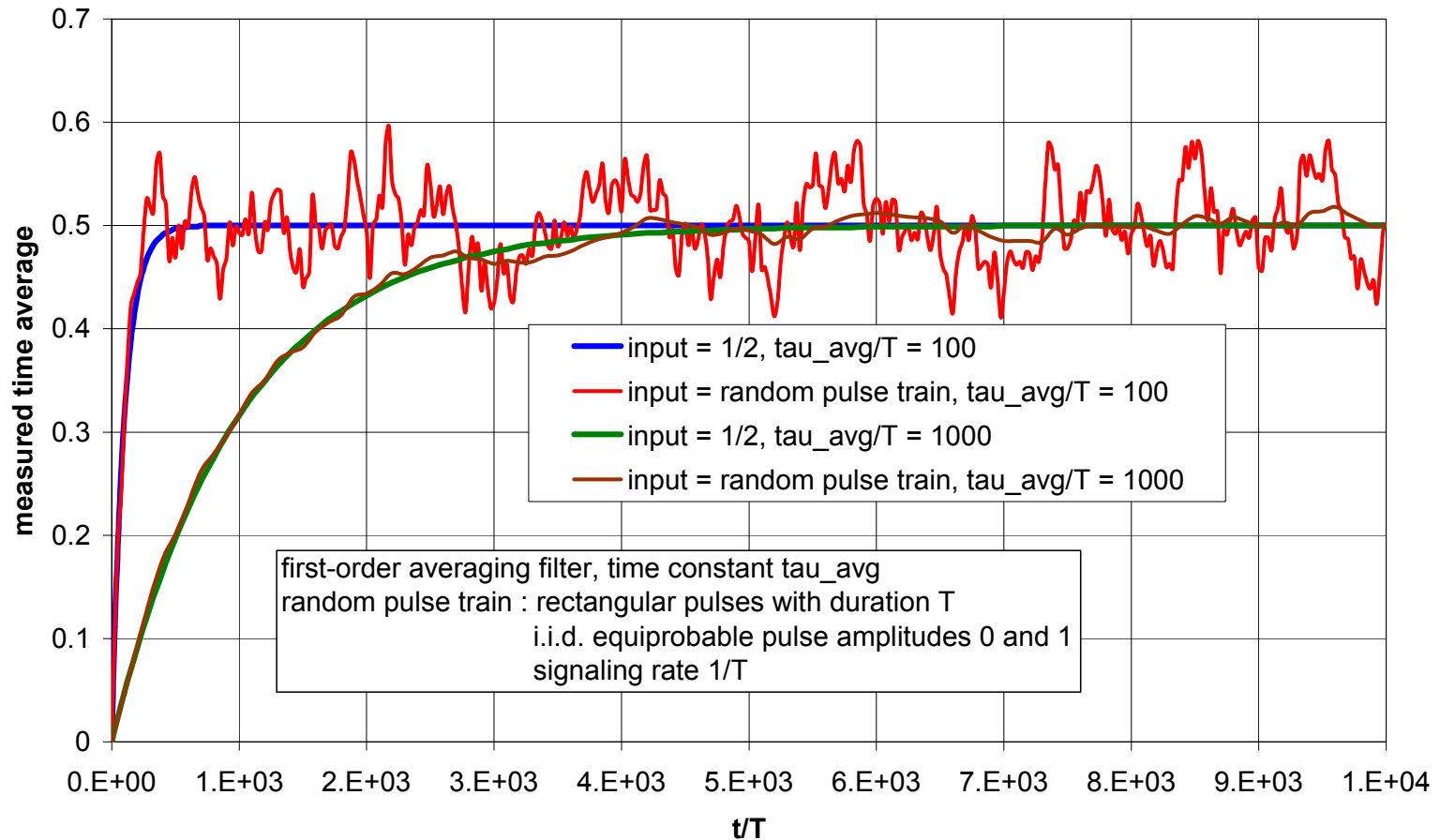
Tijdsgemiddelde over $(0, KT)$

$$m_x(K; \omega) = \frac{1}{KT} \int_0^{KT} x(t; \omega) dt = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} a_k(\omega)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} m_x(K; \omega) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} a_k(k; \omega) = E[a_k(\omega)] = \frac{1}{2} \quad (\text{indien ergodiciteit})$$

Meting van tijdsgemiddelde (5)

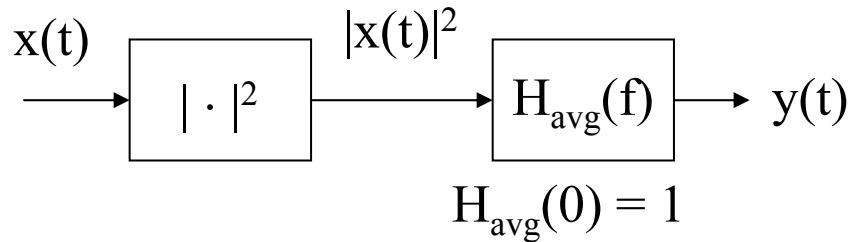
Voorbeeld (vervolg) $x(t;\omega)$ vanaf $t=0$ aanleggen aan $H_{\text{avg}}(f) = 1/(1 + j2\pi f\tau_{\text{avg}})$



Als τ_{avg}/T toeneemt : meting *nauwkeuriger*, maar overgangsverschijnsel *trager*

Meting van vermogen (1)

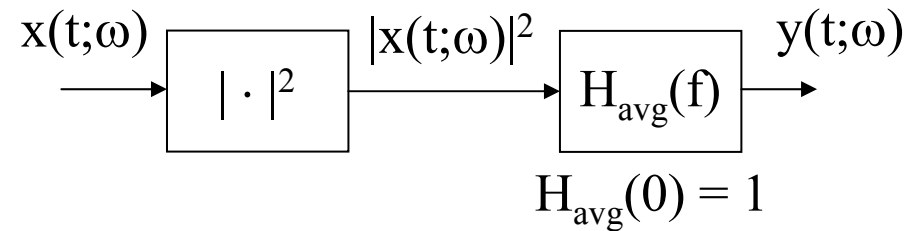
Deterministisch signaal $x(t)$



$$P_x = \langle |x(t)|^2 \rangle_t$$

$$y(t) \approx P_x$$

Stochastisch signaal $x(t;\omega)$



$$y(t;\omega) \approx \langle |x(t;\omega)|^2 \rangle_t = P_x$$

indien **ergodiciteit**

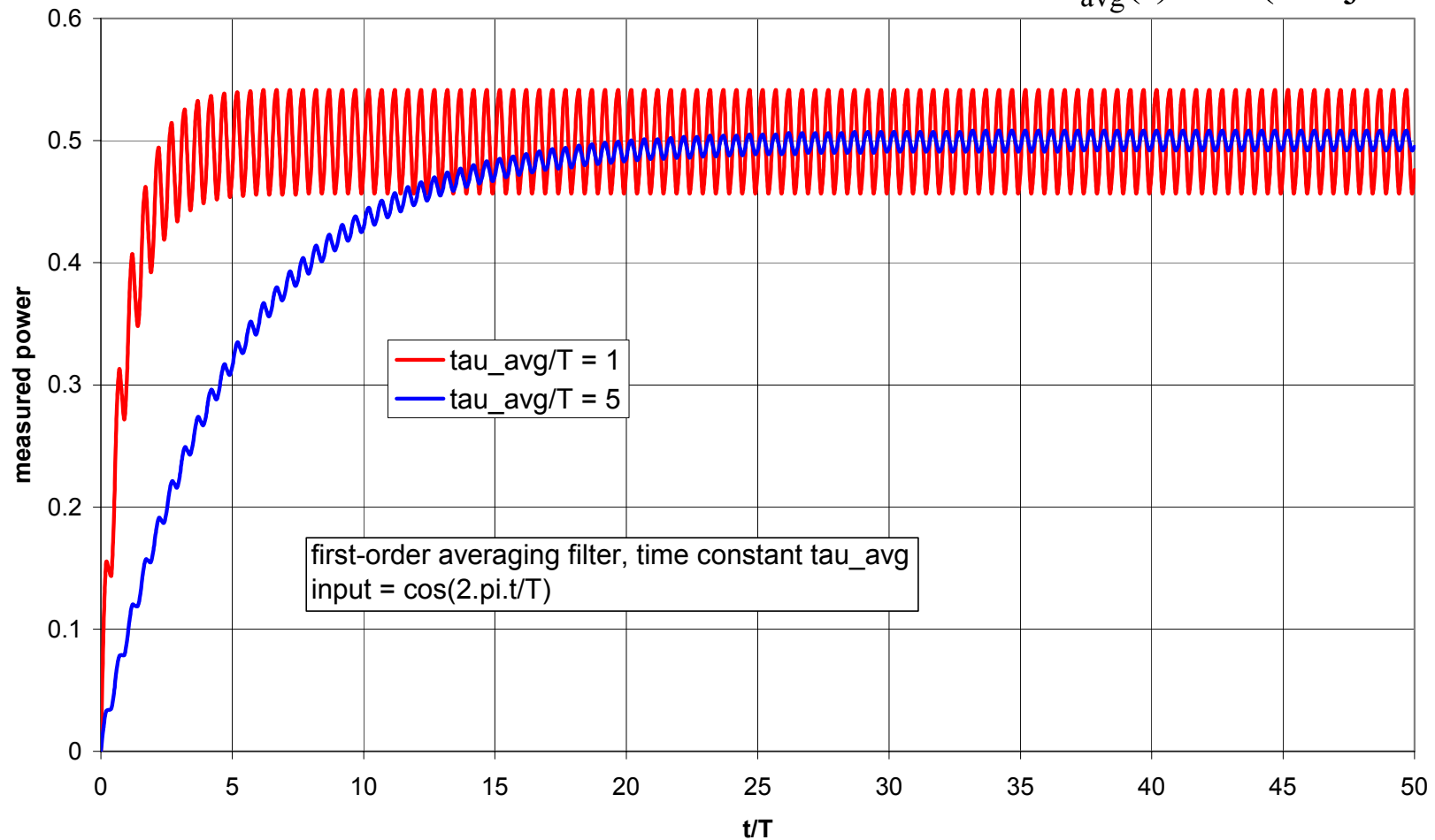
Kies $B_{\text{avg}} \ll$ bandbreedte $|x(t;\omega)|^2$

$x(t;\omega)$ freq. comp. in $(F_{\text{min}}, F_{\text{max}})$

$\Rightarrow |x(t;\omega)|^2$ freq. comp. in $(-(F_{\text{max}}-F_{\text{min}}), (F_{\text{max}}-F_{\text{min}}))$

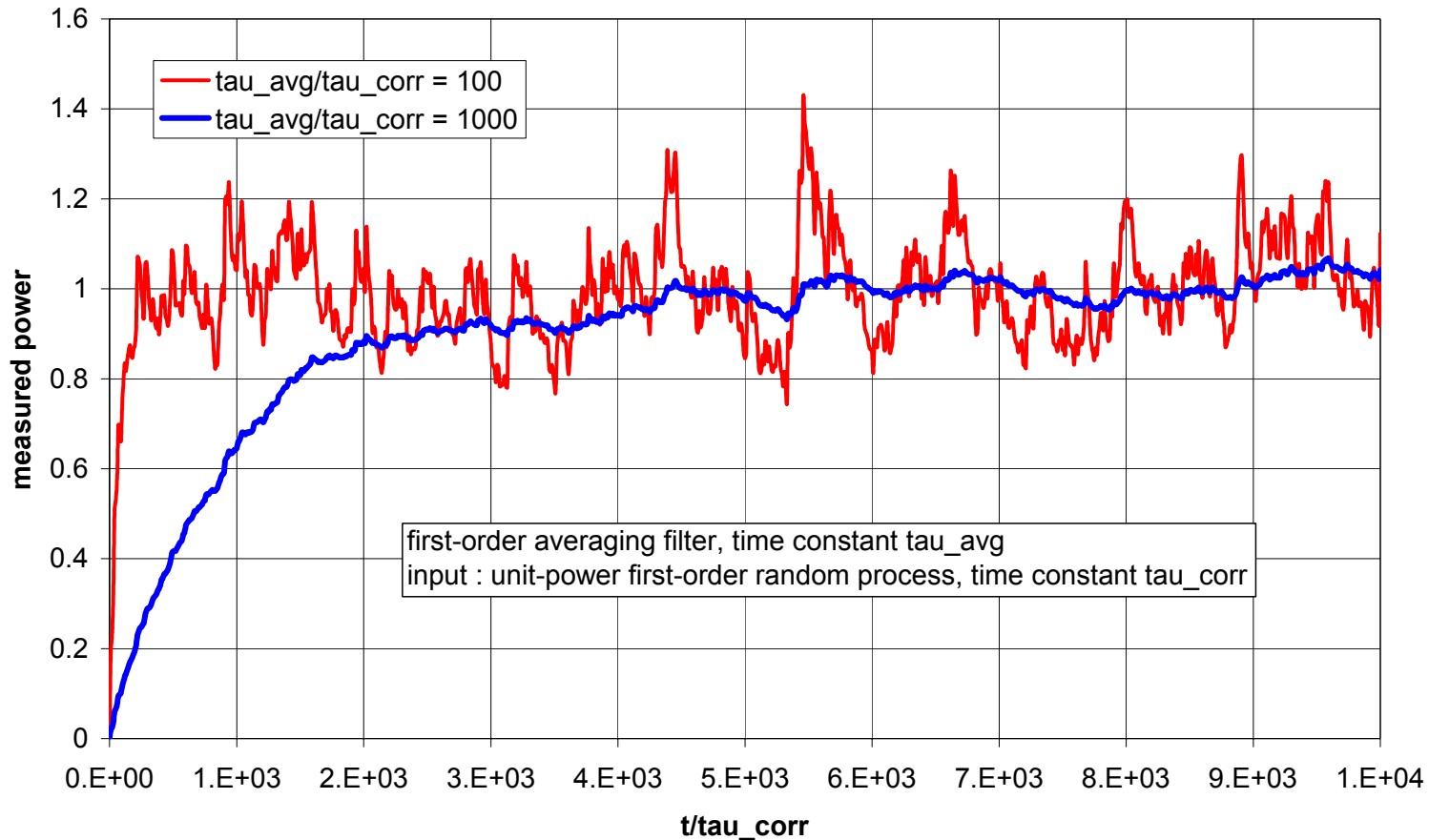
Meting van vermogen (2)

Voorbeeld 1 $x(t) = \cos(2\pi t/T) \Rightarrow P_x = 1/2$ $|x(t; \omega)|^2$ vanaf $t=0$ aanleggen
aan $H_{\text{avg}}(f) = 1/(1 + j2\pi f\tau_{\text{avg}})$



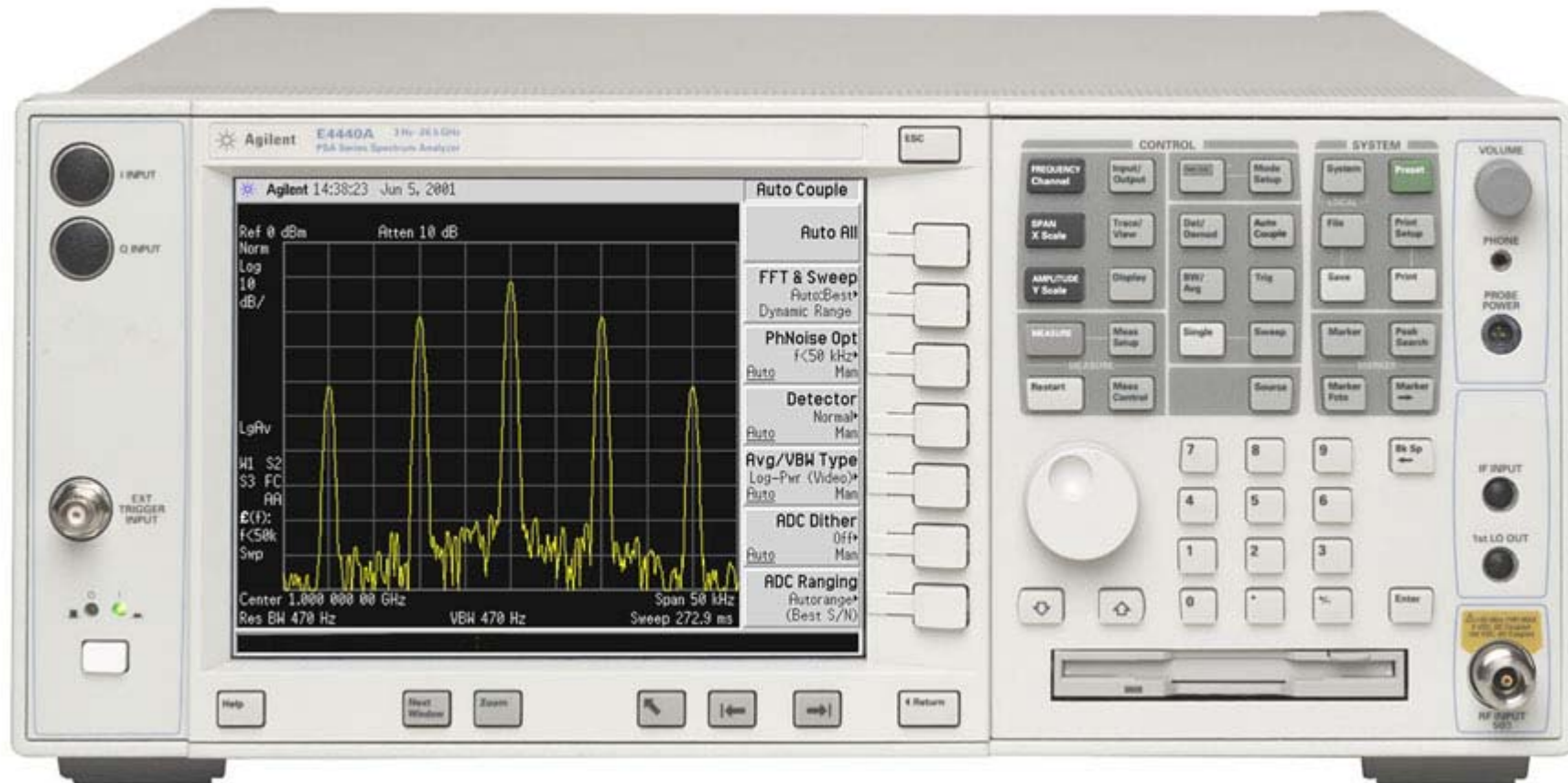
Meting van vermogen (3)

Voorbeeld 2 $x(t; \omega)$ stationair met $R_x(u) = \exp(-|u|/\tau_{\text{corr}}) \Rightarrow P_x = R_x(0) = 1$
 $|x(t; \omega)|^2$ vanaf $t=0$ aanleggen aan $H_{\text{avg}}(f) = 1/(1 + j2\pi f\tau_{\text{avg}})$



Meting van vermogenspectrum (1)

Spectrum analyzer



Meting van vermogenspectrum (2)

“Spectrum analyzer” meet vermogen $P(f_0, B_{\text{res}})$ van *reëelwaardig* signaal $x(t)$ in een frequentieband met breedte B_{res} rond de frequenties f_0 en $-f_0$

Meting van $P_x(f_0, B_{\text{res}})$ voor $f_0 \in \text{span} = (f_{\text{min}}, f_{\text{max}})$

B_{res} , f_{min} en f_{max} zijn instelbaar

Display toont $P_x(f_0, B_{\text{res}})$ als functie van f_0 , met $f_0 \in (f_{\text{min}}, f_{\text{max}})$