

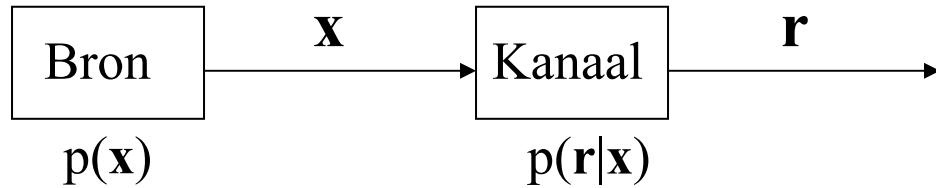
# **Modulatie en detectie**

## **Hoofdstuk 2 :**

# **Estimatie- en Decisietheorie**

# **Definities**

# Bron, Kanaal en Schatting



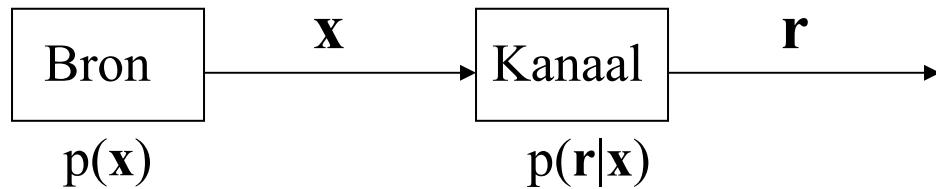
$x$  : parametervector

$r$  : observatievector

$p(r|x)$  : distributie van  $r$  bij gegeven  $x$

$p(x)$  : a priori distributie van  $x$

# Bron, Kanaal en Schatting



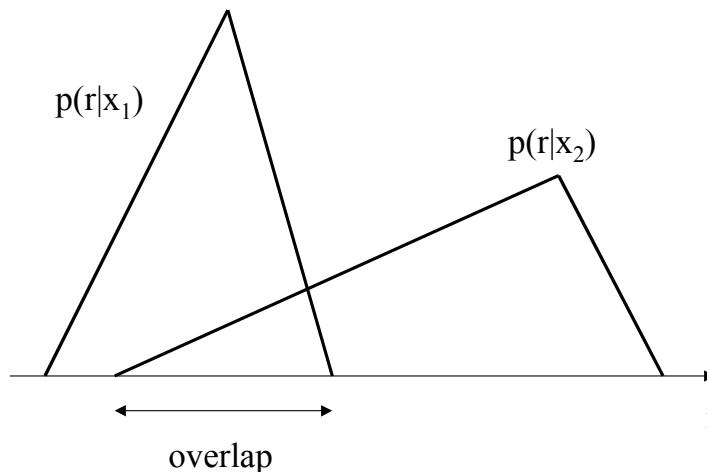
$x$  : parametervector

$r$  : observatievector

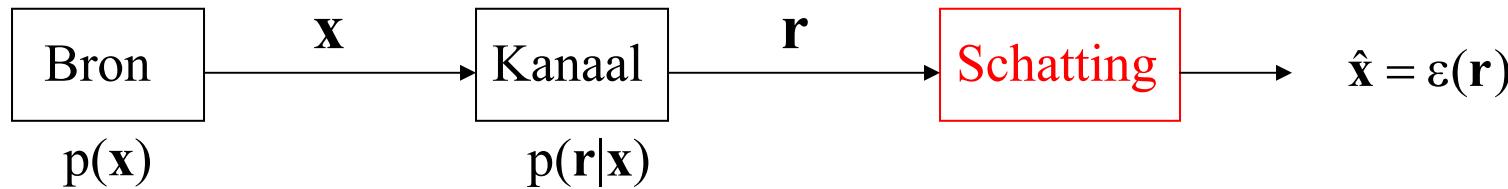
$p(r|x)$  : distributie van  $r$  bij gegeven  $x$

$p(x)$  : a priori distributie van  $x$

de exacte waarde van  $x$  kan meestal niet bepaald worden uit  $r$



# Bron, Kanaal en Schatting



$x$  : parametervector

$r$  : observatievector

$p(r|x)$  : distributie van  $r$  bij gegeven  $x$

$p(x)$  : a priori distributie van  $x$

de exacte waarde van  $x$  kan meestal niet bepaald worden uit  $r$

we zoeken een *schatting*  $\hat{x}$

$\hat{x}$  is een deterministische functie van  $r$

$$\hat{x} = \varepsilon(r)$$

# Kostfunctie en Risico

Kostfunctie  $C(\hat{x}, x)$  vergelijkt  $x$  en  $\hat{x}$

$C(\hat{x}, x)$  wordt minimum voor  $\hat{x} = x$

Risico = gemiddelde van de kostfunctie

$$R = E_{r,x}[C(\hat{x}, x)] = \iint C(\varepsilon(r), x) p(r, x) dr dx$$

$E_{r,x}[\cdot]$  : verwachtingswaarde over  $r$  en  $x$

$p(r, x)$  : gezamenlijke distributie van  $r$  en  $x$

De *optimale* schatting  $\varepsilon(r)$  minimaliseert het risico  $R$

# Informatie (a priori, a posteriori) en kansfunctie

gezamenlijke distributie  $p(\mathbf{r}, \mathbf{x})$  is te schrijven als

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{r})p(\mathbf{r})$$

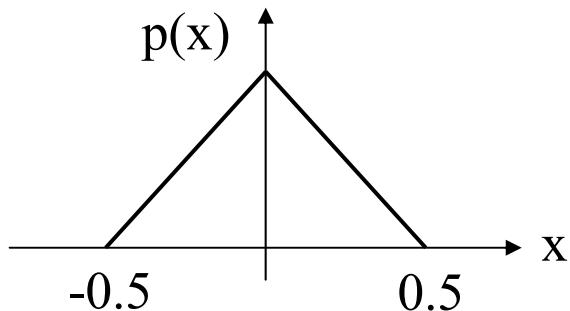
# Informatie (a priori, a posteriori) en kansfunctie

gezamenlijke distributie  $p(r,x)$  is te schrijven als

$$p(r,x) = p(r|x)p(x) = p(x|r)p(r)$$

- $p(x)$  is de *a priori* distributie van  $x$ , en vertegenwoordigt onze kennis van  $x$  wanneer we geen toegang hebben tot de observatie  $r$

voorbeeld

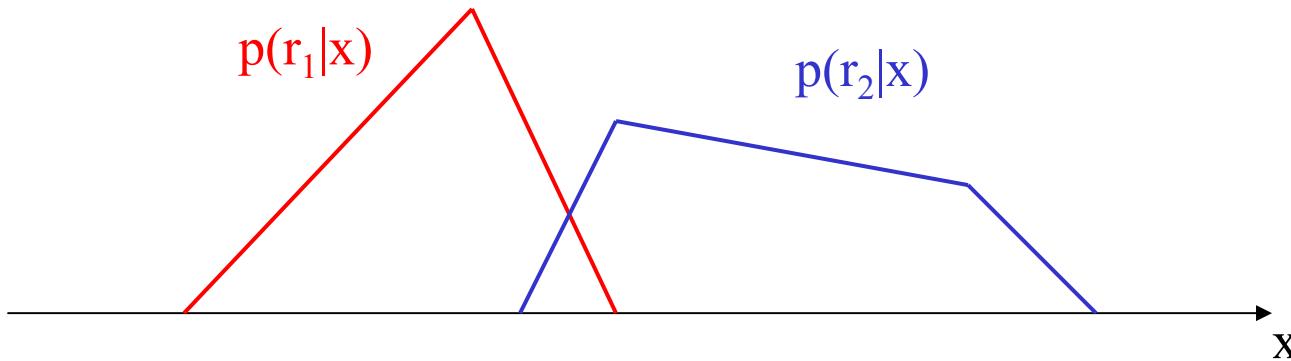


# Informatie (a priori, a posteriori) en kansfunctie

gezamenlijke distributie  $p(\mathbf{r}, \mathbf{x})$  is te schrijven als

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{r})p(\mathbf{r})$$

- $p(\mathbf{x})$  is de *a priori* distributie van  $\mathbf{x}$ , en vertegenwoordigt onze kennis van  $\mathbf{x}$  wanneer we geen toegang hebben tot de observatie  $\mathbf{r}$
- $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$ , beschouwd als functie van  $\mathbf{x}$ , is de *kansfunctie (likelihood function)* van  $\mathbf{x}$ , en vertegenwoordigt onze kennis van  $\mathbf{x}$  verworven via de observatie  $\mathbf{r}$



# Informatie (a priori, a posteriori) en kansfunctie

gezamenlijke distributie  $p(\mathbf{r}, \mathbf{x})$  is te schrijven als

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{r})p(\mathbf{r})$$

- $p(\mathbf{x})$  is de *a priori* distributie van  $\mathbf{x}$ , en vertegenwoordigt onze kennis van  $\mathbf{x}$  wanneer we geen toegang hebben tot de observatie  $\mathbf{r}$
- $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$ , beschouwd als functie van  $\mathbf{x}$ , is de *kansfunctie (likelihood function)* van  $\mathbf{x}$ , en vertegenwoordigt onze kennis van  $\mathbf{x}$  verworven via de observatie  $\mathbf{r}$
- $p(\mathbf{r})$  is de marginale distibutie van  $\mathbf{r}$  :

$$p(\mathbf{r}) = \int p(\mathbf{r}, \mathbf{x})d\mathbf{x} = \int p(\mathbf{r} | \mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$p(\mathbf{r})$  hangt niet af van  $\mathbf{x}$ , en levert dus geen informatie over  $\mathbf{x}$

# Informatie (a priori, a posteriori) en kansfunctie

gezamenlijke distributie  $p(\mathbf{r}, \mathbf{x})$  is te schrijven als

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{r})p(\mathbf{r})$$

- $p(\mathbf{x})$  is de *a priori* distributie van  $\mathbf{x}$ , en vertegenwoordigt onze kennis van  $\mathbf{x}$  wanneer we geen toegang hebben tot de observatie  $\mathbf{r}$
- $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$ , beschouwd als functie van  $\mathbf{x}$ , is de *kansfunctie (likelihood function)* van  $\mathbf{x}$ , en vertegenwoordigt onze kennis van  $\mathbf{x}$  verworven via de observatie  $\mathbf{r}$
- $p(\mathbf{r})$  is de marginale distributie van  $\mathbf{r}$  :

$$p(\mathbf{r}) = \int p(\mathbf{r}, \mathbf{x})d\mathbf{x} = \int p(\mathbf{r} | \mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$p(\mathbf{r})$  hangt niet af van  $\mathbf{x}$ , en levert dus geen informatie over  $\mathbf{x}$

- $p(\mathbf{x}|\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})/p(\mathbf{r})$  is de *a posteriori* distributie van  $\mathbf{x}$ ;  $p(\mathbf{x}|\mathbf{r})$  vertegenwoordigt onze *totale* kennis van  $\mathbf{x}$ , door *a priori* kennis  $p(\mathbf{x})$  en de kansfunctie  $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$  te combineren ( $p(\mathbf{r})$  is enkel een normalisatiefactor)

# Voorbeeld 1 : HIV-test

kwaliteit HIV-test gekarakteriseerd door :

$$\Pr[\text{test positief} \mid \text{geen HIV}] \quad (\text{typisch } \ll 1)$$

$$\Pr[\text{test negatief} \mid \text{HIV}] \quad (\text{typisch } \ll 1)$$

Voorbeeld :       $\Pr[\text{test positief} \mid \text{geen HIV}] = 0.05 \text{ (0.005)}$   
                         $\Pr[\text{test negatief} \mid \text{HIV}] = 0.01(0.001)$

Wat is de waarschijnlijkheid dat patiënt besmet (niet besmet) is door HIV, wanneer de test postief (negatief) is ?

# Voorbeeld 1 : HIV-test

kwaliteit HIV-test gekarakteriseerd door :

$$\Pr[\text{test positief} \mid \text{geen HIV}] \quad (\text{typisch } \ll 1)$$

$$\Pr[\text{test negatief} \mid \text{HIV}] \quad (\text{typisch } \ll 1)$$

Voorbeeld :       $\Pr[\text{test positief} \mid \text{geen HIV}] = 0.05 \text{ (0.005)}$   
                         $\Pr[\text{test negatief} \mid \text{HIV}] = 0.01 \text{ (0.001)}$

Wat is de waarschijnlijkheid dat patiënt besmet (niet besmet) is door HIV, wanneer de test postief (negatief) is ?

onbekende parameter  $x \in \{\text{HIV, geen HIV}\}$

observatie  $r \in \{\text{test positief, test negatief}\}$

kansfunctie  $\Pr[r|x]$

a posteriori waarschijnlijkheid  $\Pr[x|r]$  ?

# Voorbeeld 1 : HIV-test

Berekening a posteriori informatie :

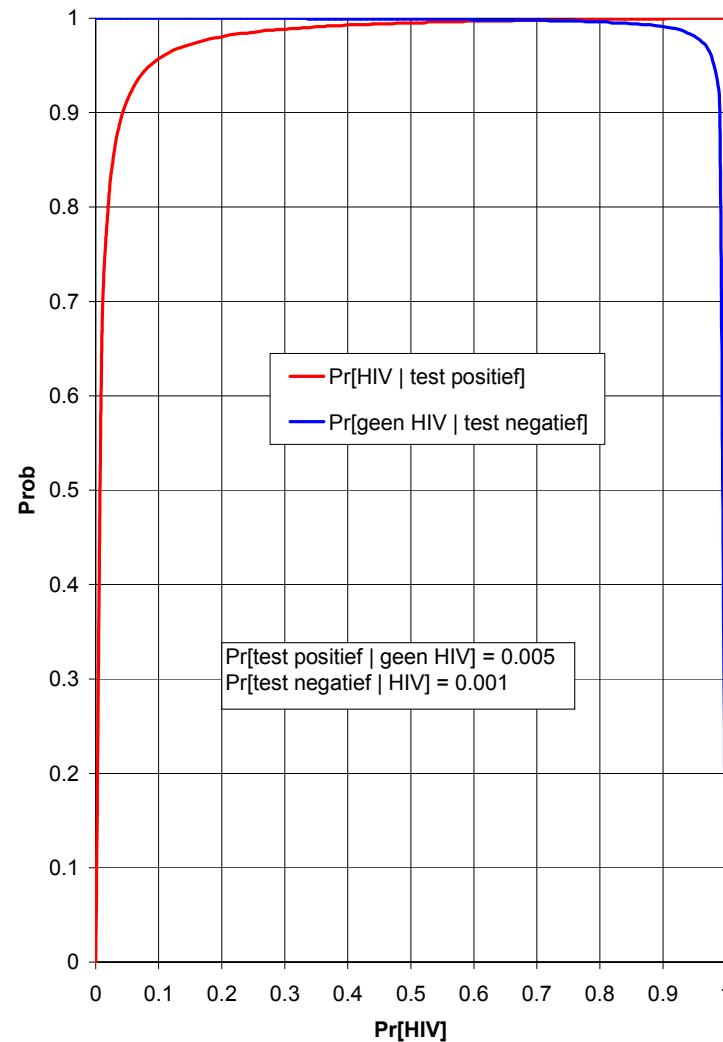
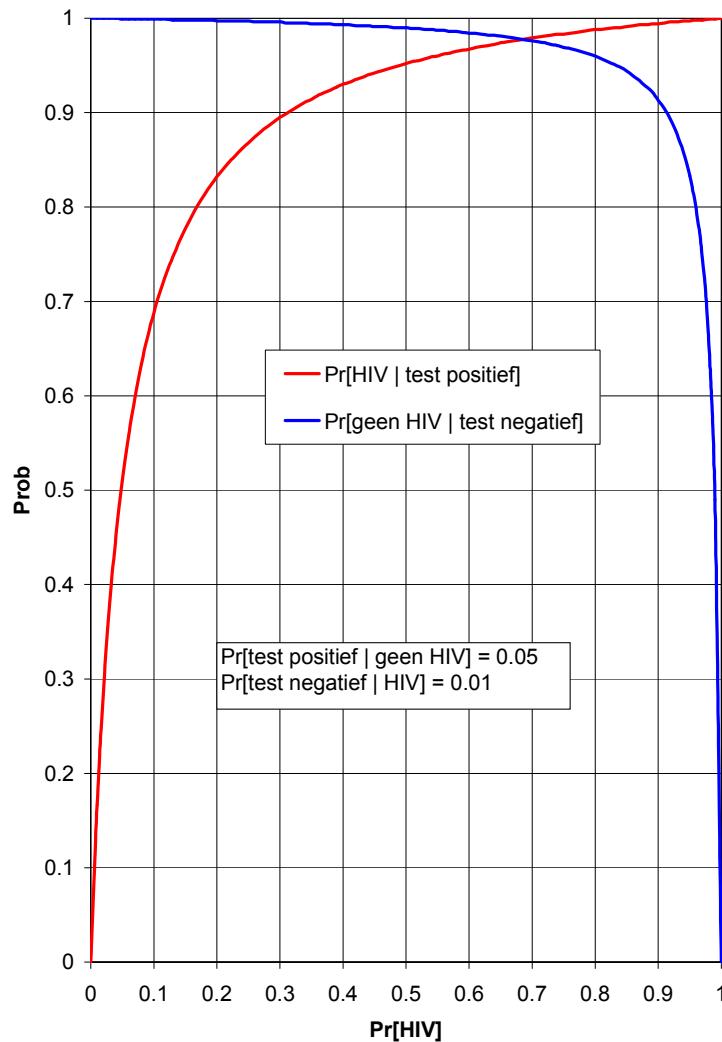
$$\Pr[\text{HIV} \mid \text{test positief}] = \frac{\Pr[\text{test positief} \mid \text{HIV}] \Pr[\text{HIV}]}{\Pr[\text{test positief}]}$$

$$\Pr[\text{geen HIV} \mid \text{test negatief}] = \frac{\Pr[\text{test negatief} \mid \text{geen HIV}] \Pr[\text{geen HIV}]}{\Pr[\text{test negatief}]}$$

$$\begin{aligned}\Pr[\text{test positief}] &= \Pr[\text{test positief} \mid \text{HIV}] \Pr[\text{HIV}] \\ &\quad + \Pr[\text{test positief} \mid \text{geen HIV}] \Pr[\text{geen HIV}]\end{aligned}$$

a priori informatie over patiënt :  $\Pr[\text{HIV}]$ ,  $\Pr[\text{geen HIV}] = 1 - \Pr[\text{HIV}]$   
bepaald door “gedrag” patiënt

# Voorbeeld 1 : HIV-test

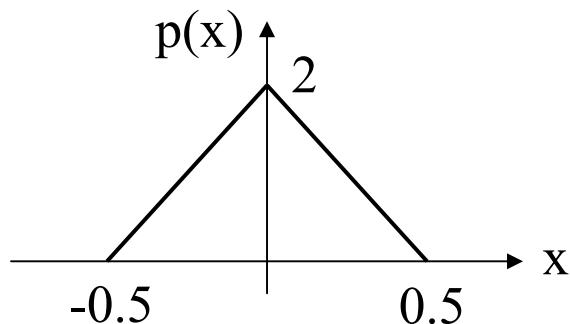


# Voorbeeld 2

$$r = x + w$$

$$w \sim N(0, \sigma^2)$$

$p(r|x)$  is Gaussiaanse distributie met gemiddelde  $x$  en variantie  $\sigma^2$



**a priori** :  $x$  tussen -0.5 en 0.5,  
hoogste waarschijnlijkheid bij  $x = 0$

**kansfunctie :**  $p(r|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(r-x)^2}{2\sigma^2}\right)$

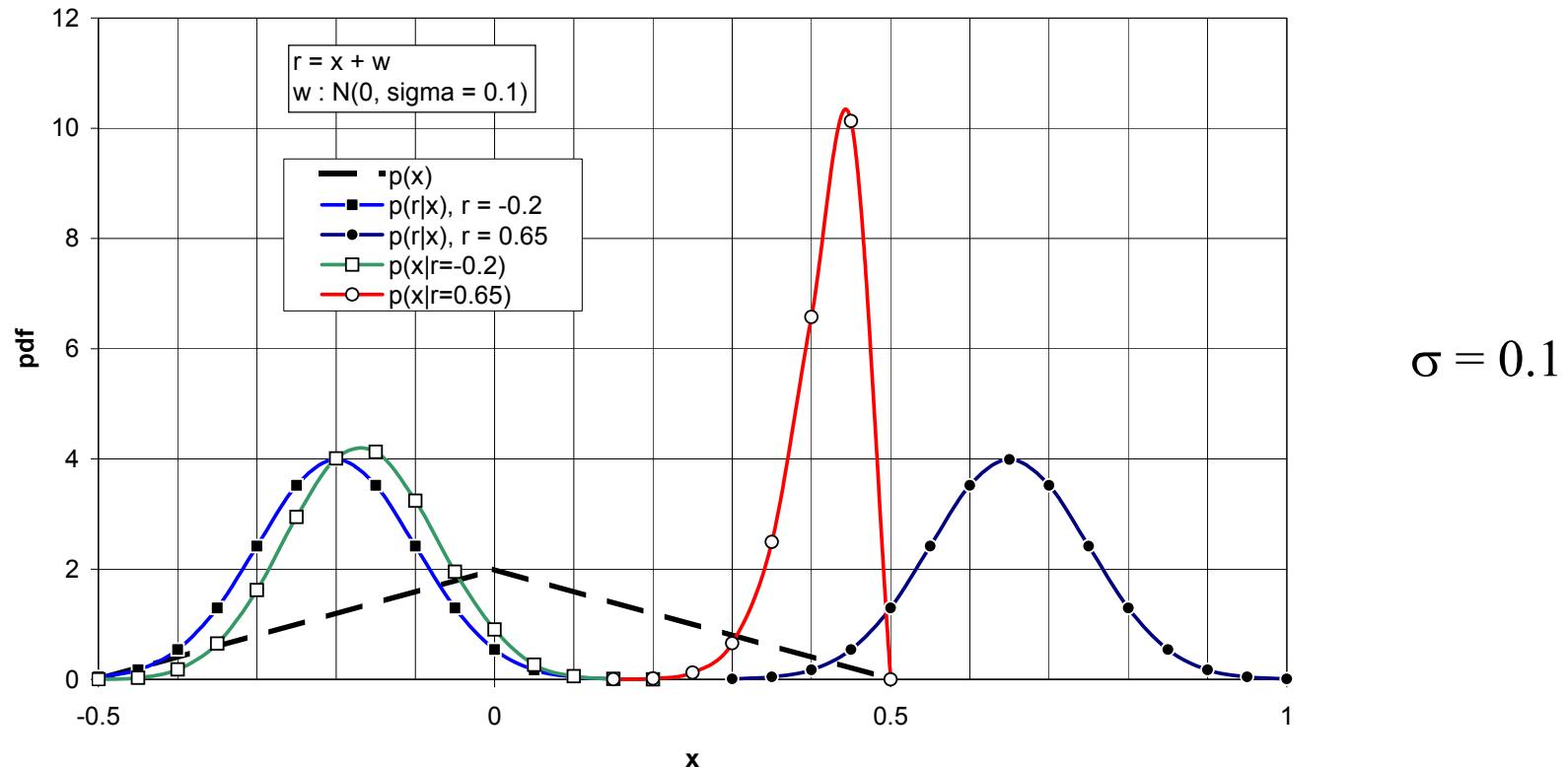
$x = r$  is de meest aannemelijke (*most likely*) waarde voor  $x$   
(bij gegeven  $r$  wordt  $p(r|x)$  maximaal voor  $x = r$ )

# Voorbeeld 2

$\sigma$  klein,  $r = -0.2 \Rightarrow$  a posteriori  $\approx$  kansfunctie

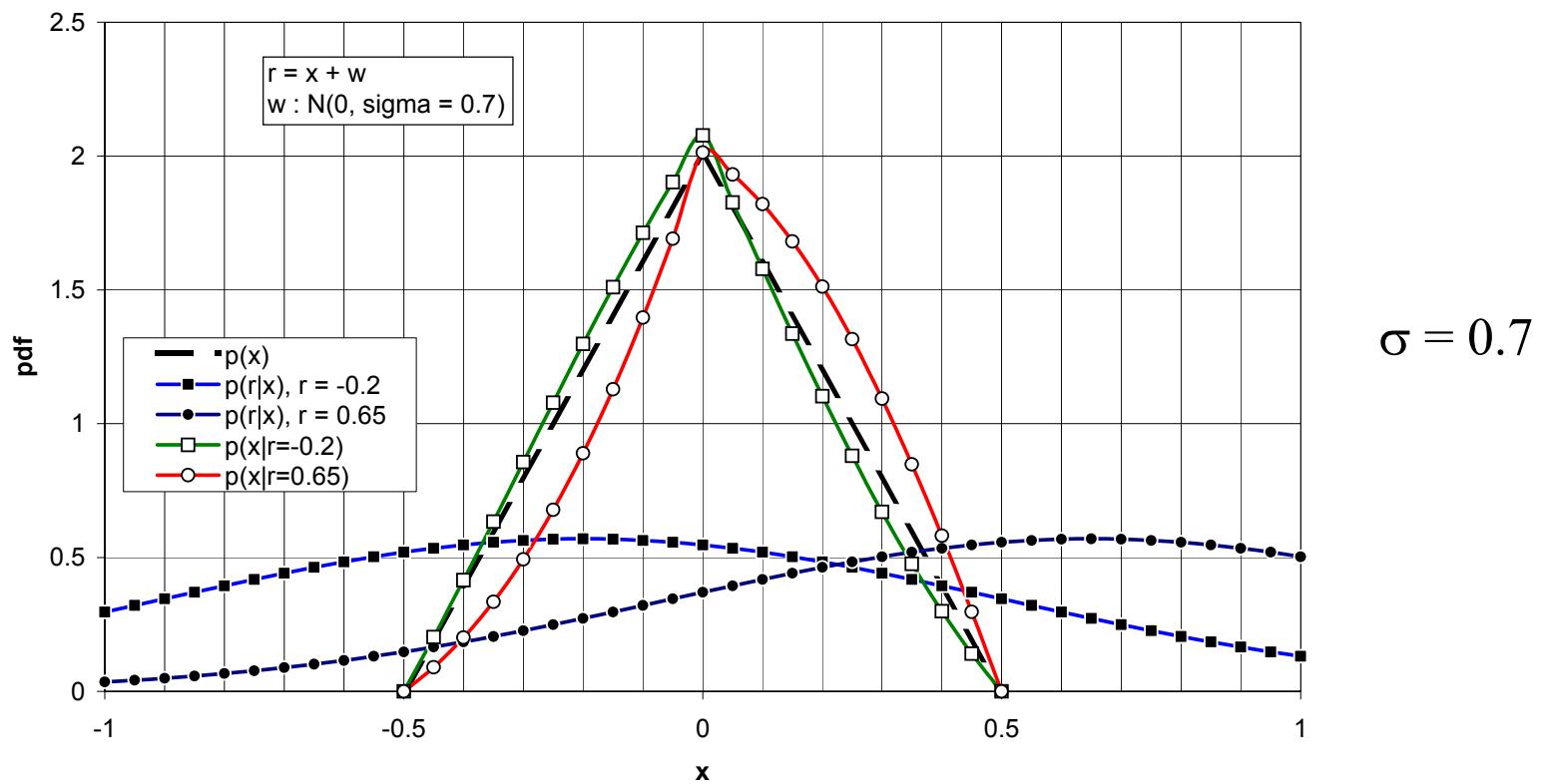
waarneming betrouwbaar indien  $r \in (-0.5, 0.5)$

$\sigma$  klein,  $r = 0.65 \Rightarrow$  a posteriori verschilt sterk van kansfunctie en a priori



# Voorbeeld 2

$\sigma$  groot  $\Rightarrow$  a posteriori  $\approx$  a priori, ongeacht waarneming  $r$   
a priori informatie betrouwbaarder dan waarneming



# **Detectie en estimatie**

# Detectie

Detectie : schatten van een *discrete* parameter (hypothesetest).  
Schatting wordt “decisie” genoemd.

Beschouw kostfunctie     $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \\ 1 & \hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x} \end{cases}$

Risico :

$$R = E[C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})] = \Pr[\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}] = P_e \quad \text{foutprobabiliteit}$$

*MAP detector* minimaliseert  $P_e$

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \Pr[\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}] = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \ln \Pr[\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}]$$

# Detectie

MAP detector kan omgevormd worden tot

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \Pr[\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}] p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} (\ln \Pr[\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}] + \ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}))$$

Indien  $\mathbf{x}$  uniform over  $X$  : MAP detector wordt ML detector

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}})$$

ML detector kan ook gebruikt worden wanneer  
a priori distributie onbekend is of genegeerd wordt

# Estimatie

Estimatie : schatten van een *continue* parameter.

Beschouw kostfunctie       $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = |\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2$

Risico :       $R = E[C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})] = E[|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2] = \text{MSE}$

# Estimatie

Estimatie : schatten van een *continue* parameter.

Beschouw kostfunctie       $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = |\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2$

Risico :       $R = E[C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})] = E[|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2] = \text{MSE}$

Minimaliseren van MSE is vaak vrij bewerkelijk. Alternatief : *MAP schatting* :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \ln p(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}) \\ &= \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\tilde{\mathbf{x}}) p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} (\ln p(\tilde{\mathbf{x}}) + \ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}))\end{aligned}$$

# Estimatie

Estimatie : schatten van een *continue* parameter.

Beschouw kostfunctie       $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = |\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2$

Risico :       $R = E[C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})] = E[|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2] = \text{MSE}$

Minimaliseren van MSE is vaak vrij bewerkelijk. Alternatief : *MAP schatting* :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \ln p(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}) \\ &= \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\tilde{\mathbf{x}}) p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} (\ln p(\tilde{\mathbf{x}}) + \ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}))\end{aligned}$$

Indien  $p(x)$  uniform over  $X$  : MAP schatting wordt ML schatting

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} (\ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}))$$

ML schatting kan ook gebruikt worden wanneer a priori distributie onbekend of genegeerd, of  $\mathbf{x}$  is onbekende deterministische parameter

# Voorbeeld 1 : estimatie

$$r = x + w \quad x : \text{scalaire parameter} \quad w \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\text{log. kansfunctie : } \ln p(r | x) = -\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{(r-x)^2}{2\sigma^2} \propto \frac{-(r-x)^2}{2\sigma^2} \quad \text{figuur}$$

a priori :  $p(x)$  uniform over (-0.5, 0.5)

MAP (of ML) schatting :

$$\hat{x} = \begin{cases} r & r \in (-1/2, 1/2) \\ -1/2 & r < -1/2 \\ 1/2 & r > 1/2 \end{cases}$$

# Voorbeeld 2 : detectie

$$r = x + w \quad x : \text{scalaire parameter} \quad w \sim N(0, \sigma^2)$$

log. kansfunctie :

$$\ln p(r | x) = \frac{-(r - x)^2}{2\sigma^2}$$

figuur

a priori :

$$\Pr[x=1] = \Pr[x=-1] = 0.5$$

MAP (of ML) detectie :

$$\begin{array}{c} \hat{x}=1 \\ \ln p(r | x=1) > \ln p(r | x=-1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \hat{x}=1 \\ r > 0 \end{array} \Rightarrow \hat{x} = \text{sgn}(r)$$
$$\begin{array}{c} \hat{x}=-1 \\ \ln p(r | x=1) < \ln p(r | x=-1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \hat{x}=-1 \\ r < 0 \end{array}$$

# Voorbeeld 3 : transmissie over BSC

encoder :  $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c} = \chi(\mathbf{b})$

$\mathbf{b}$  : k informatiebits       $\mathbf{c}$  : n gecodeerde bits

alle sequenties  $\mathbf{b}$  even waarschijnlijk

BSC : foutprobabiliteit p ( $p < 1/2 \Rightarrow (1-p)/p > 1$ )

$\mathbf{r}$  : ontvangen n-bit woord

# Voorbeeld 3 : transmissie over BSC

encoder :  $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c} = \chi(\mathbf{b})$

$\mathbf{b}$  : k informatiebits       $\mathbf{c}$  : n gecodeerde bits

alle sequenties  $\mathbf{b}$  even waarschijnlijk

BSC : foutprobabiliteit  $p$  ( $p < 1/2 \Rightarrow (1-p)/p > 1$ )

$\mathbf{r}$  : ontvangen n-bit woord

kansfunctie :  $\Pr[\mathbf{r} = \mathbf{a} | \mathbf{c}] = \prod_{i=1}^n \Pr[r_i = a_i | c_i]$

$$\Pr[r_i = a_i | c_i] = \begin{cases} 1-p & a_i = c_i \\ p & a_i \neq c_i \end{cases}$$

# Voorbeeld 3 : transmissie over BSC

Kansfunctie :

$$\Pr[r = \mathbf{a} | \tilde{\mathbf{b}}] = \Pr[r = \mathbf{a} | \mathbf{c} = \chi(\tilde{\mathbf{b}})] = (1-p)^{n-d} p^d = (1-p)^n \left( \frac{1-p}{p} \right)^{-d}$$

$d = d_H(r, \chi(\tilde{\mathbf{b}}))$  : Hamming afstand

kansfunctie is dalende functie van  $d$

MAP (of ML) detectie :

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{b}}} d_H(r, \chi(\tilde{\mathbf{b}}))$$

minimalisatie van Hamming afstand tussen  
ontvangen woord en mogelijk codewoord

repetiecode :  
 $0 \rightarrow 000$   
 $1 \rightarrow 111$   
 $\mathbf{r} : 110$

# **Voldoende statistiek - Omkeerbare transformatie**

# Voldoende statistiek

In veel gevallen :  $\ln(p(\mathbf{r}|\mathbf{x})) = g(\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{x}) + f(\mathbf{r})$

# Voldoende statistiek

In veel gevallen :  $\ln(p(\mathbf{r}|\mathbf{x})) = g(\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{x}) + f(\mathbf{r}) \propto g(\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{x})$

*hangt niet af van  $\mathbf{x}$*

$\Rightarrow \mathbf{z} = \varphi(\mathbf{r})$  is “voldoende statistiek” (*sufficient statistic*)

$\mathbf{r}$  en  $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{r})$  bevatten dezelfde informatie over  $\mathbf{x}$ .

# Voldoende statistiek

In veel gevallen :  $\ln(p(\mathbf{r}|\mathbf{x})) = g(\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{x}) + f(\mathbf{r}) \propto g(\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{x})$

*hangt niet af van  $\mathbf{x}$*

$\Rightarrow \mathbf{z} = \varphi(\mathbf{r})$  is “voldoende statistiek” (*sufficient statistic*)

$\mathbf{r}$  en  $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{r})$  bevatten dezelfde informatie over  $\mathbf{x}$ .

De transformatie  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{z} = \varphi(\mathbf{r})$  is vaak NIET omkeerbaar : er gaat dus informatie verloren bij de transformatie, maar de verloren informatie is NIET relevant voor het schatten van  $\mathbf{x}$ .

# Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$  :  $T(\cdot)$  is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$  bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek  $\mathbf{z}$

$\Rightarrow \mathbf{u}$  is ook voldoende statistiek

# Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$  :  $T(\cdot)$  is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$  bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek  $\mathbf{z}$

$\Rightarrow \mathbf{u}$  is ook voldoende statistiek

Zoek de beste schatting in overeenstemming met kostfunctie  $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$

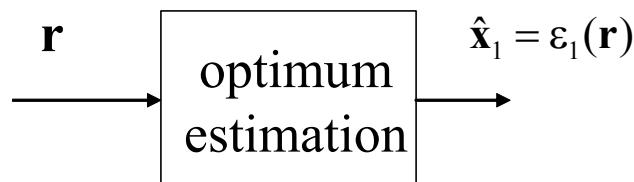
# Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$  :  $T(\cdot)$  is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$  bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek  $\mathbf{z}$

$\Rightarrow \mathbf{u}$  is ook voldoende statistiek

Zoek de beste schatting in overeenstemming met kostfunctie  $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$



$$\min E_{\mathbf{r}, \mathbf{x}} [C(\varepsilon_1(\mathbf{r}), \mathbf{x})]$$

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{x}), p(\mathbf{x})$$

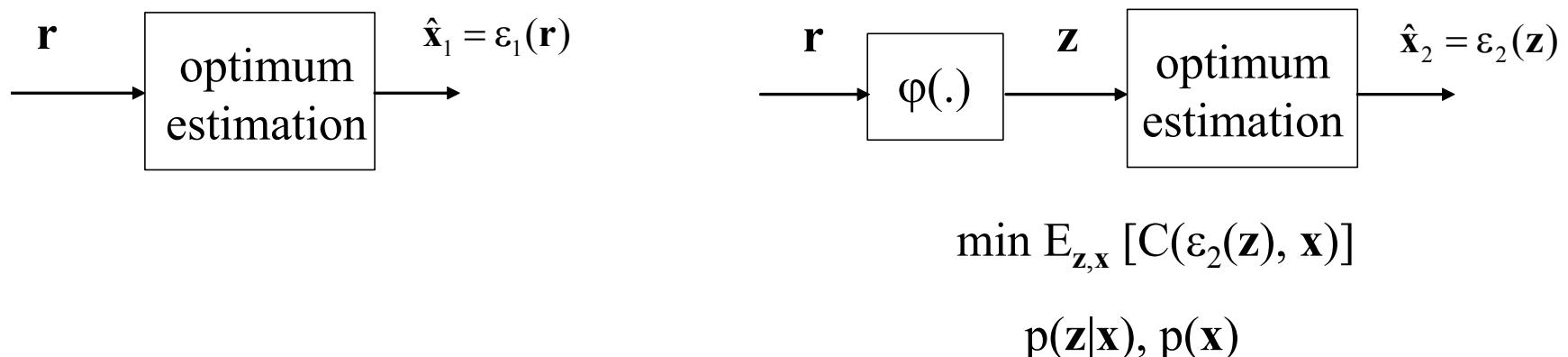
# Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$  :  $T(\cdot)$  is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$  bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek  $\mathbf{z}$

$\Rightarrow \mathbf{u}$  is ook voldoende statistiek

Zoek de beste schatting in overeenstemming met kostfunctie  $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$



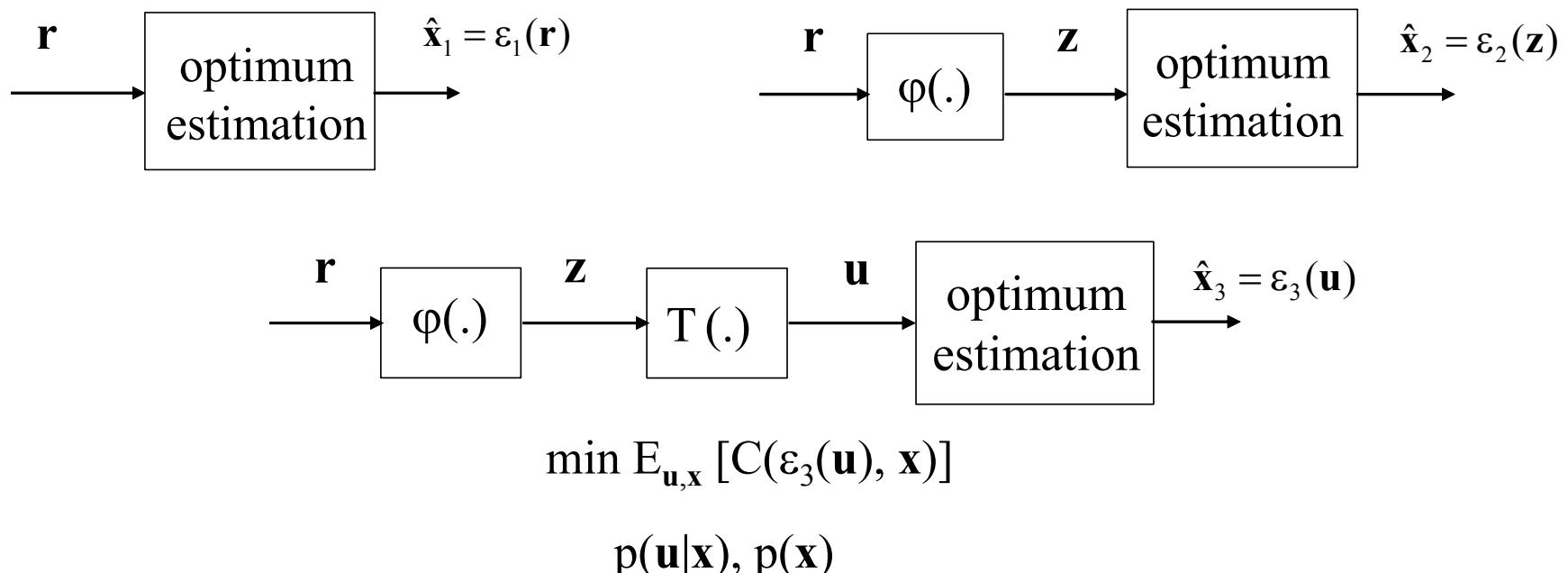
# Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$  :  $T(\cdot)$  is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$  bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek  $\mathbf{z}$

$\Rightarrow \mathbf{u}$  is ook voldoende statistiek

Zoek de beste schatting in overeenstemming met kostfunctie  $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$



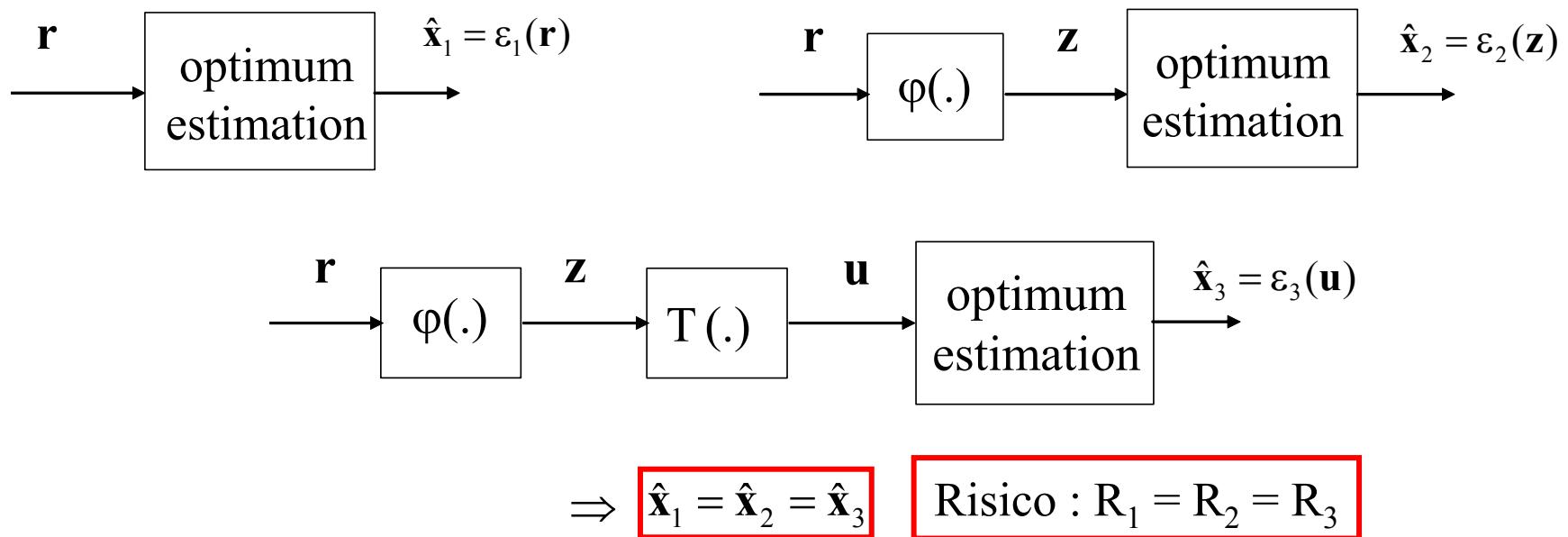
# Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$  :  $T(\cdot)$  is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$  bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek  $\mathbf{z}$

$\Rightarrow \mathbf{u}$  is ook voldoende statistiek

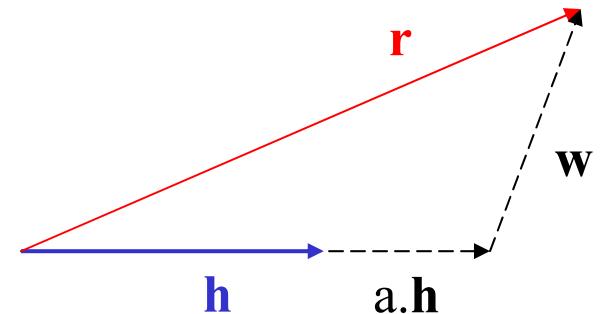
Zoek de beste schatting in overeenstemming met kostfunctie  $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$



# Voorbeeld : detectie

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{w}, \mathbf{w} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_K)$$

$\mathbf{a} \in$  constellatie C (M punten)



$$\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{a}) = -K \cdot \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}|^2}{2\sigma^2} \propto \frac{-1}{2\sigma^2} (\lambda \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{h}^T \mathbf{r})) \quad |\mathbf{h}|^2 = \lambda$$

voldoende statistiek :  $z = \mathbf{h}^T \mathbf{r} \sim N(\lambda \mathbf{a}, \sigma^2 \lambda)$  : *scalair*

$$\ln p(z | \mathbf{a}) \propto \frac{-1}{2\sigma^2 \lambda} |z - \lambda \mathbf{a}|^2 \propto \frac{-1}{2\sigma^2} (\lambda \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot z)$$

omkeerbare transformatie :  $u = z/\lambda \sim N(a, \sigma^2/\lambda)$

$$\ln p(u | \mathbf{a}) \propto \frac{-\lambda}{2\sigma^2} |u - a|^2 \propto \frac{-\lambda}{2\sigma^2} (a^2 - 2a \cdot u)$$

# Voorbeeld : detectie

maximalisatie van  $\ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{a}})$  of  $\ln p(z | \tilde{\mathbf{a}})$  of  $\ln p(u | \tilde{\mathbf{a}})$

leidt tot dezelfde decisie

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}} &= \max_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} \frac{-1}{2\sigma^2} |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{h}|^2 = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{h}|^2 \\ &= \max_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} \frac{-1}{2\sigma^2 \lambda} |z - \lambda \tilde{\mathbf{a}}|^2 = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} |z - \lambda \tilde{\mathbf{a}}|^2 \\ &= \max_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} \frac{-\lambda}{2\sigma^2} |u - \tilde{\mathbf{a}}|^2 = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} |u - \tilde{\mathbf{a}}|^2\end{aligned}$$

u afronden naar  
dichtstbijgelegen  
constellatiepunt

# Gaussiaanse observatievector

# Gaussiaanse observatievector

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) + \mathbf{w} \quad \mathbf{w} \sim N_{\textcolor{red}{c}}(0, N_0 \mathbf{I}_K) \quad K : \text{dimensie van } \mathbf{r}, \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{w}$$

$$\text{logaritmische kansfunctie :} \quad N_0 = 2\sigma_0^2$$

$$\begin{aligned}\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) &= -K \ln(2\pi\sigma_0^2) - \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_k |\mathbf{r}_k - \mathbf{s}_k(\mathbf{x})|^2 \\ &\propto -\frac{1}{2\sigma_0^2} |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{x})|^2 \\ &\propto -\frac{1}{2\sigma_0^2} \left( |\mathbf{r}|^2 - 2 \operatorname{Re}[\mathbf{s}^H(\mathbf{x}) \mathbf{r}] + |\mathbf{s}(\mathbf{x})|^2 \right) \\ &\propto \frac{1}{2\sigma_0^2} \left( 2 \operatorname{Re}[\mathbf{s}^H(\mathbf{x}) \mathbf{r}] - |\mathbf{s}(\mathbf{x})|^2 \right)\end{aligned}$$

# Voorbeeld

“zachte” decodering over AWGN kanaal

encoder + mapper :  $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{a} = \chi(\mathbf{b})$

$\mathbf{b}$  : k informatiebits       $\mathbf{c}$  : n gecodeerde bits

$\mathbf{a}$  : K datasymbolen, behorend tot constellatie met  $M = 2^m$  punten ( $K = n/m$ )

alle sequenties  $\mathbf{b}$  even waarschijnlijk

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{w} \quad \mathbf{w} \sim N_c(0, \sigma_0^2 \mathbf{I}_K)$$

repetitiecode :

$$0 \rightarrow 000 \rightarrow -4, -4, -4$$

$$1 \rightarrow 111 \rightarrow 4, 4, 4$$

$$\mathbf{r} : 1, 1, -4$$

MAP (of ML) detector :

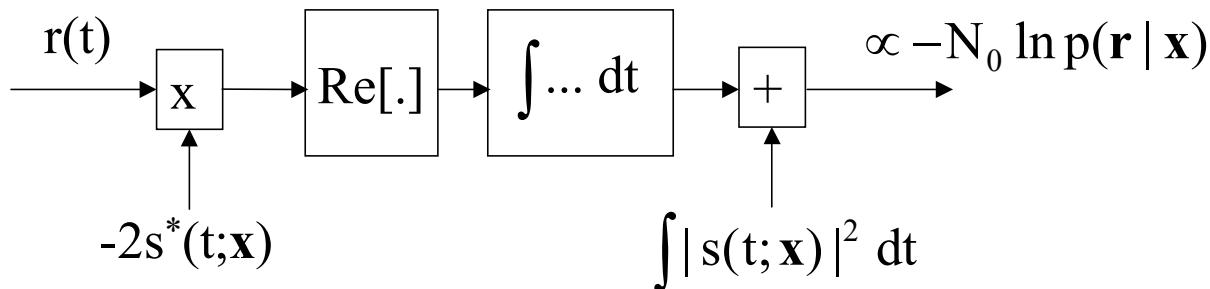
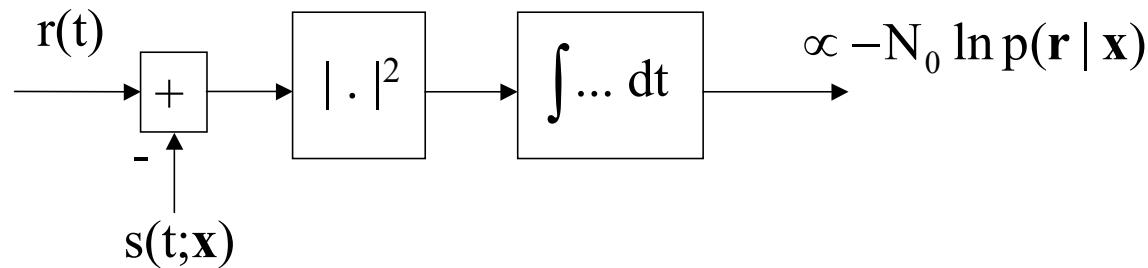
$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{b}}} |\mathbf{r} - \chi(\tilde{\mathbf{b}})|^2$$

minimalisatie van Euclidische afstand  
tussen ontvangen woord en toelaatbare  
symboolsequentie

# Continue-tijd Gaussiaanse observaties

$$r(t) = s(t; \mathbf{x}) + w(t) \quad w(t) \sim N_c(0, N_0 \delta(u))$$

$$\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \propto -\frac{1}{N_0} \int |r(t) - s(t; \mathbf{x})|^2 dt \propto \frac{1}{N_0} \int (2 \operatorname{Re}[r(t)s^*(t; \mathbf{x})] - |s(t; \mathbf{x})|^2) dt$$



# Continue-tijd Gaussiaanse observaties

Meerdere observaties (voorbeeld : meerdere antennes aan ontvanger)

$$r_n(t) = s_n(t; \mathbf{x}) + w_n(t) \quad w_n(t) \sim N_c(0, N_{0,n} \delta(u)) \quad (n = 0, \dots, N-1)$$

ruistermen  $w_{n1}(t)$  en  $w_{n2}(t)$  statistisch onafhankelijk

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) &\propto \sum_{n=0}^{N-1} \frac{-1}{N_{0,n}} \int |r_n(t) - s_n(t; \mathbf{x})|^2 dt \\ &\propto \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N_{0,n}} \int (2 \operatorname{Re}[r_n(t)s_n^*(t; \mathbf{x})] - |s_n(t; \mathbf{x})|^2) dt \end{aligned}$$

# Cramer-Rao grens

$\mathbf{r} \sim N_c(\mathbf{s}(\mathbf{x}), 2\sigma^2 \mathbf{I}_N)$ ,  $\mathbf{x}$  reële continue vectorparameter

$$E_{\mathbf{r}, \mathbf{x}}[(\hat{\mathbf{x}}_m - \mathbf{x}_m)^2] \geq (\mathbf{J}_T^{-1})_{m,m} \quad \text{benchmark voor MSE}$$

$$\mathbf{J}_T = \mathbf{J}_P + E_{\mathbf{x}}[\mathbf{J}] \quad \mathbf{J} : \text{Fisher information matrix (FIM)}$$

$$(\mathbf{J}_P)_{m,n} = E_{\mathbf{x}} \left[ \frac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_m} \cdot \frac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_n} \right] = -E_{\mathbf{x}} \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_m \partial \mathbf{x}_n} \right] \quad (\text{bijdrage a priori informatie})$$

$$\text{FIM : } (\mathbf{J})_{m,n} = \frac{1}{\sigma^2} \left( \text{Re} \left[ \frac{\partial \mathbf{s}^H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_m} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_n} \right] \right) \quad (\text{bijdrage observatie})$$

MAP schatting :

$$E_{\mathbf{r}, \mathbf{x}}[(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) - \mathbf{x})^T] \rightarrow \mathbf{J}_T^{-1} \quad \text{wanneer } N \rightarrow \infty \text{ of } \sigma^2 \rightarrow 0$$

# Cramer-Rao grens : opmerkingen

Continue observatie  $r(t) = s(t; \mathbf{x}) + w(t)$ ,  $w(t) \sim N_c(0, N_0\delta(u))$

Formules blijven gelden, met

$$(J)_{m,n} = \frac{2}{N_0} \operatorname{Re} \left[ \int \frac{\partial s^*(t; \mathbf{x})}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial s(t; \mathbf{x})}{\partial x_n} dt \right]$$

CRB voor complexe parameter

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + j\mathbf{x}_I : \text{CRB toepassen op } \mathbf{x}' = (\mathbf{x}_R^T, \mathbf{x}_I^T)^T$$

# Cramer-Rao grens : voorbeeld

$$r = x + w, \text{ with } x \sim N(0, \sigma_x^2) \quad w \sim N(0, \sigma_w^2)$$

MAP schatting

$$\hat{x} = r \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_w^2} \quad E_{r,x}[(\hat{x} - x)^2] \geq \frac{\sigma_w^2 \sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_w^2} \quad (\text{geldt hier met gelijkheid !})$$

ML schatting (maakt geen gebruik van a priori informatie)

$$\hat{x} = r \quad E_{r,x}[(\hat{x} - x)^2] \geq \sigma_w^2 \quad (\text{geldt hier met gelijkheid !})$$

$$\text{CRB}_{\text{ML}} > \text{CRB}_{\text{MAP}}$$

# **ML detectie bij Gaussiaanse observatie : BER performantie**

# Exacte BER-uitdrukking (1)

Observatie :  $\mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{a}) + \mathbf{w}$      $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}_c(0, N_0 \mathbf{I}_K)$      $\mathbf{a} \in C^N$                            $N_0 = 2\sigma_0^2$

$C$  : constellatie met  $M$  punten

ML detectie :  $\hat{\mathbf{a}} = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tilde{\mathbf{a}})|^2$

Verstuurd :  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_i \in C^N$       Gedetecteerd :  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_j \in C^N$       #bitfouten :  $N_b(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_i)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_i)_n \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_i)_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_j)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_j)_n \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_j)_N \end{pmatrix}$$

$n_b((\mathbf{a}_i)_1, (\mathbf{a}_j)_1)$		
$n_b((\mathbf{a}_i)_n, (\mathbf{a}_j)_n)$		
$n_b((\mathbf{a}_i)_N, (\mathbf{a}_j)_N)$		

---

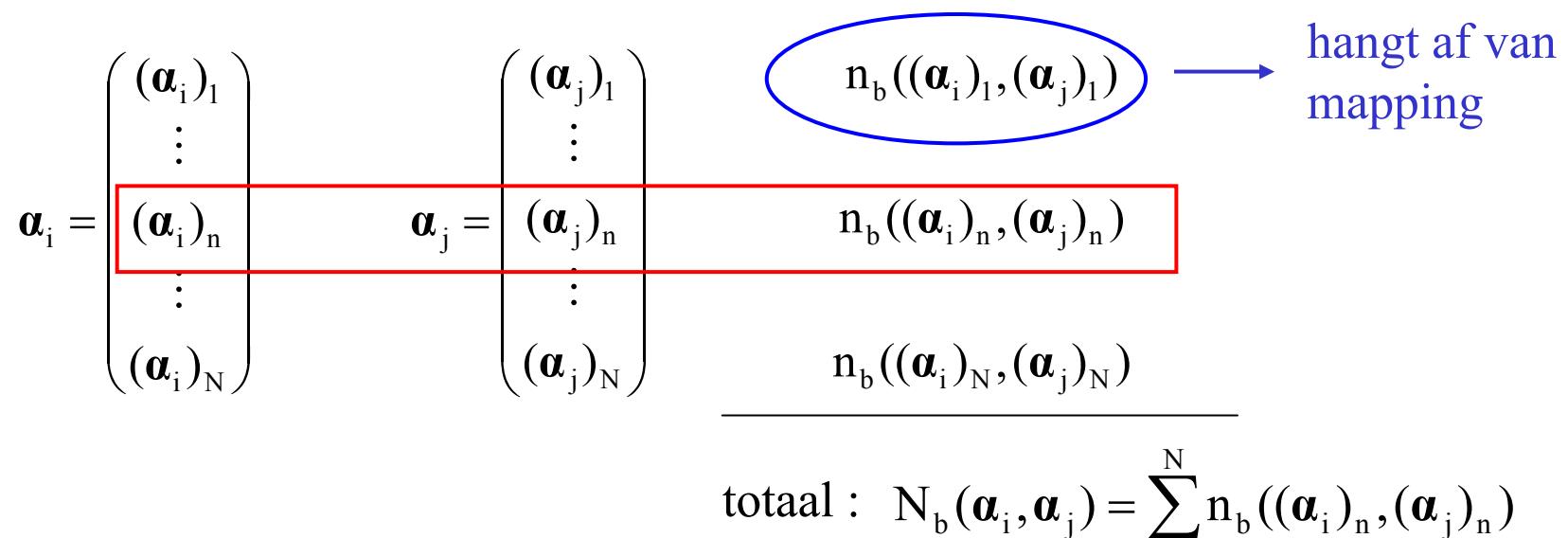
totaal :  $N_b(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \sum_{n=1}^N n_b((\mathbf{a}_i)_n, (\mathbf{a}_j)_n)$

# Exakte BER-uitdrukking (1)

$$\text{Observatie : } \mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{a}) + \mathbf{w} \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}_c(0, \mathbf{N}_0 \mathbf{I}_K) \quad \mathbf{a} \in \mathbb{C}^N \quad \mathbf{N}_0 = 2\sigma_0^2$$

$$\text{ML detectie : } \hat{\mathbf{a}} = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} | \mathbf{r} - \mathbf{s}(\tilde{\mathbf{a}}) |^2$$

$$\text{Verstuurd : } \mathbf{a} = \mathbf{a}_i \in C^N \quad \text{Gedetecteerd : } \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_j \in C^N \quad \# \text{bitfouten : } N_b(\mathbf{a}_i, \hat{\mathbf{a}}_j)$$



# Exacte BER-uitdrukking (2)

Conditionele BER m.b.t. symboolvector (voor  $\mathbf{a} = \alpha_i$ ) :

$$\text{BER}(\alpha_i) = \frac{E[N_b(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) | \mathbf{a} = \alpha_i]}{N \cdot \log_2(M)} = \frac{1}{N \cdot \log_2(M)} \sum_{j=1}^{M^N} N_b(\alpha_i, \alpha_j) \Pr[\hat{\mathbf{a}} = \alpha_j | \mathbf{a} = \alpha_i]$$

Gemiddelde BER m.b.t. symboolvector :

$$\text{BER} = \frac{E[N_b(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}})]}{N \cdot \log_2(M)} = \sum_{i=1}^{M^N} \text{BER}(\alpha_i) \Pr[\mathbf{a} = \alpha_i]$$

Bij ongedecodeerde transmissie geldt :  $\Pr[\mathbf{a} = \alpha_i] = M^{-N}$

# Exacte BER-uitdrukking (3)

$$N_b(a_i, a_j) = \sum_{n=1}^N n_b((a_i)_n, (a_j)_n) \Rightarrow \text{equivalente uitdrukking voor BER}$$

Conditionele BER m.b.t. n-de symbool (voor  $a_n = \alpha_m$ )

$$\text{BER}_n(\alpha_m) = \frac{E[n_b(a_n, \hat{a}_n) | a_n = \alpha_m]}{\log_2(M)} = \frac{1}{\log_2(M)} \sum_{m'=1}^M n_b(\alpha_m, \alpha_{m'}) \Pr[\hat{a}_n = \alpha_{m'} | a_n = \alpha_m]$$

Gemiddelde BER m.b.t. n-de symbool

$$\text{BER}_n = \frac{E[n_b(a_n, \hat{a}_n)]}{\log_2(M)} = \sum_{m=1}^M \text{BER}_n(\alpha_m) \Pr[a_n = \alpha_m]$$

Gemiddelde BER m.b.t. symboolvector :  $\text{BER} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{BER}_n$

# Bovengrens op BER (1)

$\Pr[\hat{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\alpha}_j | \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i]$  en  $\Pr[\hat{\mathbf{a}}_n = \alpha_m | a_n = \alpha_m]$  moeilijk te berekenen

Eenvoudige bovengrens bepalen op  $\Pr[\hat{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\alpha}_j | \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i]$

$$\Pr[\hat{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\alpha}_j | \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i] = \Pr \left[ \bigcap_{\ell \neq j} (|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha}_j)|^2 \leq |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha}_\ell)|^2) | \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i \right]$$

$$\Rightarrow \Pr[\hat{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\alpha}_j | \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i] \leq \text{PEP}_{j|i} = \Pr[|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha}_j)|^2 \leq |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha}_i)|^2 | \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i]$$

PEP : “pairwise error probability”

$$\text{BER} \leq \text{BER}_{\text{up}} = \sum_{i=1}^{M^N} \text{BER}_{\text{up}}(\boldsymbol{\alpha}_i) \Pr[\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i]$$

$$\text{BER}_{\text{up}}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \frac{1}{N \cdot \log_2(M)} \sum_{j=1}^{M^N} N_b(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) \text{PEP}_{j|i} \leq \text{BER}(\boldsymbol{\alpha}_i)$$

# Bovengrens op BER (2)

Berekening PEP<sub>j|i</sub>

$$\text{PEP}_{j|i} = \Pr[|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha_j)|^2 < |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha_i)|^2 | \mathbf{a} = \alpha_i]$$

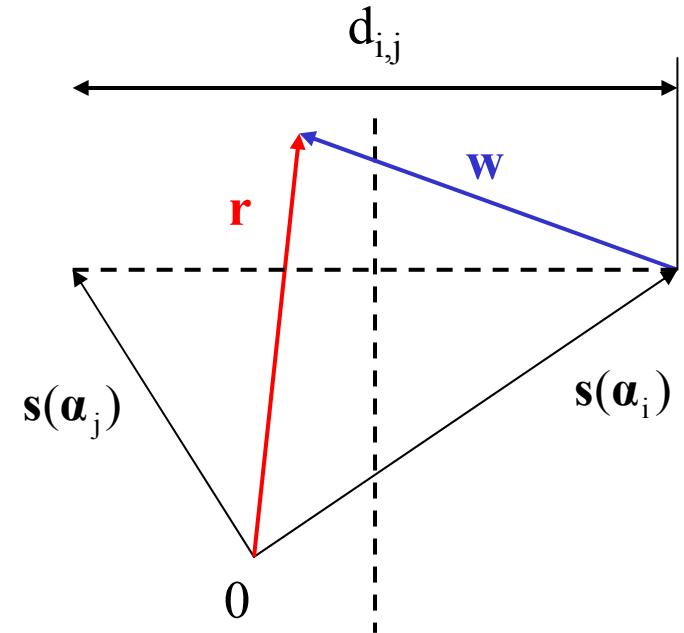
$$\mathbf{r} = \mathbf{s}(\alpha_i) + \mathbf{w}$$

$$= \Pr[|\Delta_{i,j} + \mathbf{w}|^2 < |\mathbf{w}|^2]$$

$$\Delta_{i,j} = \mathbf{s}(\alpha_i) - \mathbf{s}(\alpha_j)$$

$$= \Pr[2 \operatorname{Re}[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}] < -|\Delta_{i,j}|^2]$$

$$d_{i,j}^2 = |\Delta_{i,j}|^2 = |\mathbf{s}(\alpha_i) - \mathbf{s}(\alpha_j)|^2$$



# Bovengrens op BER (2)

## Berekening PEP<sub>j|i</sub>

$$\text{PEP}_{j|i} = \Pr[|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)|^2 < |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_i)|^2 | \mathbf{a} = \mathbf{a}_i]$$

$$= \Pr[2 \operatorname{Re}[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}] < -|\Delta_{i,j}|^2]$$

$$\Delta_{i,j} = \mathbf{s}(\mathbf{a}_i) - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)$$

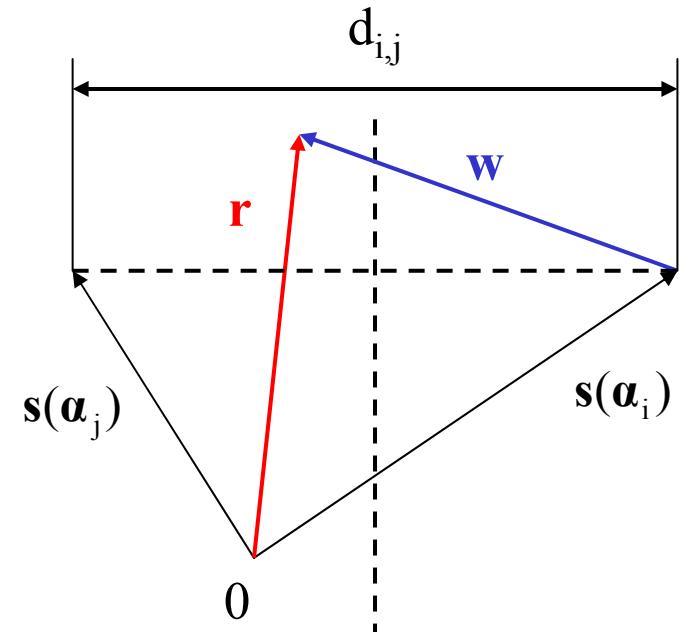
$$d_{i,j}^2 = |\Delta_{i,j}|^2 = |\mathbf{s}(\mathbf{a}_i) - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)|^2$$

$\mathbf{w}$  is circulair symmetrisch (CS)  $\Rightarrow \Delta_{i,j}^H \mathbf{w}$  is CS

$$E[|\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}|^2] = E[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w} \mathbf{w}^H \Delta_{i,j}] = 2\sigma_0^2 |\Delta_{i,j}|^2 = 2\sigma_0^2 d_{i,j}^2$$

$$\Delta_{i,j}^H \mathbf{w} \sim N_c(0, 2\sigma_0^2 d_{i,j}^2)$$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{Re}[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}] \sim N(0, 4\sigma_0^2 d_{i,j}^2)$$



# Bovengrens op BER (2)

## Berekening PEP<sub>j|i</sub>

$$\begin{aligned} \text{PEP}_{j|i} &= \Pr[|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)|^2 < |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_i)|^2 | \mathbf{a} = \mathbf{a}_i] \\ &= \Pr[2 \operatorname{Re}[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}] < -|\Delta_{i,j}|^2] \end{aligned}$$

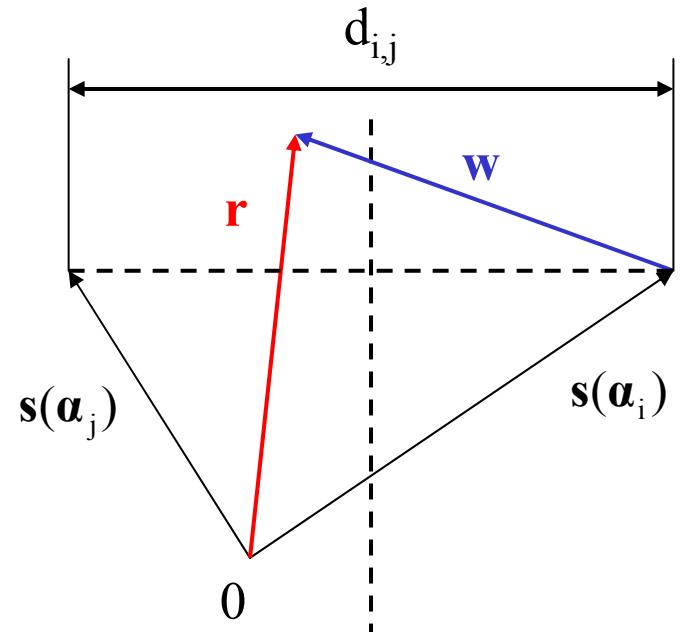
$$\Delta_{i,j} = \mathbf{s}(\mathbf{a}_i) - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)$$

$$d_{i,j}^2 = |\Delta_{i,j}|^2 = |\mathbf{s}(\mathbf{a}_i) - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)|^2$$

$$2 \operatorname{Re}[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}] \sim N(0, 4\sigma_0^2 d_{i,j}^2)$$

$$\Rightarrow \text{PEP}_{j|i} = Q\left(\sqrt{\frac{d_{i,j}^4}{4\sigma_0^2 d_{i,j}^2}}\right) = Q\left(\frac{d_{i,j}}{2\sigma_0}\right)$$

$$Q(v) = \int_v^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$



# Bovengrens op BER (3)

$$\text{BER}_{\text{up}}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \frac{1}{N \cdot \log_2(M)} \sum_{j=1}^{M^N} N_b(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) Q\left(\frac{d_{i,j}}{2\sigma_0}\right)$$

$$\text{BER}_{\text{up}} = \sum_{i=1}^{M^N} \text{BER}_{\text{up}}(\boldsymbol{\alpha}_i) \Pr[\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i] = C \cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_0}\right) + \text{smaller terms}$$

$$d_{\min} = \min_{i \neq j} d_{i,j} = \min_{i \neq j} |s(\boldsymbol{\alpha}_i) - s(\boldsymbol{\alpha}_j)|$$

minimale Euclidische afstand  
tussen signaalvectoren

$$C = \frac{1}{N \cdot \log_2(M)} \sum_{i=1}^{M^N} \left( \sum_{\boldsymbol{\alpha}_j \in A_i} N_b(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) \right) \Pr[\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i]$$

$$A_i = \{\boldsymbol{\alpha}_j, |s(\boldsymbol{\alpha}_i) - s(\boldsymbol{\alpha}_j)| = d_{\min}\}$$

verzameling van symboolvectoren, waarvan de  
corresponderende signaalvectoren op minimale  
afstand  $d_{\min}$  liggen van  $s(\boldsymbol{\alpha}_i)$

# Bovengrens op BER (4)

## Voorbeeld 1

Observatiemodel :  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{w}$  ( $s(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ )  $\mathbf{w} \sim N_c(0, N_0 \mathbf{I}_N)$ ,  $a_n \in \{-1, 1\}$

Stel :  $\mathbf{a}_i$  en  $\mathbf{a}_j$  verschillen in m posities

$$N_b(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = m \quad d_{i,j}^2 = 4m \quad d_{min} = 2 \quad (m=1)$$

Bij gegeven  $\mathbf{a}_i$  zijn er  $C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}$  vectoren  $\mathbf{a}_j$  die in m posities verschillen met  $\mathbf{a}_i$

$$BER_{up}(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N C_N^m m Q\left(\frac{\sqrt{m}}{\sigma_0}\right) \quad \text{hangt niet af van } \mathbf{a}_i$$

$$BER_{up} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N C_N^m m Q\left(\frac{\sqrt{m}}{\sigma_0}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) + \text{smaller terms}$$

# Bovengrens op BER (4)

## Voorbeeld 1

Observatiemodel :  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{w}$  ( $s(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ )  $\mathbf{w} \sim N_c(0, N_0 \mathbf{I}_N)$ ,  $a_n \in \{-1, 1\}$

Stel :  $\mathbf{a}_i$  en  $\mathbf{a}_j$  verschillen in m posities

$$N_b(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = m \quad d_{i,j}^2 = 4m \quad d_{min} = 2 \quad (m=1)$$

Bij gegeven  $\mathbf{a}_i$  zijn er  $C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}$  vectoren  $\mathbf{a}_j$  die in m posities verschillen met  $\mathbf{a}_i$

$$BER_{up}(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N C_N^m m Q\left(\frac{\sqrt{m}}{\sigma_0}\right) \quad \text{hangt niet af van } \mathbf{a}_i$$

$$BER_{up} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N C_N^m m Q\left(\frac{\sqrt{m}}{\sigma_0}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) + \text{smaller terms}$$

term met  $m=1$

termen met  $m > 1$

# Bovengrens op BER (5)

## Voorbeeld 1 (vervolg)

Observatiemodel :  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{w}$  ( $s(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ )  $\mathbf{w} \sim N_c(0, N_0 \mathbf{I}_N)$ ,  $a_n \in \{-1, 1\}$

ML decisieregel

$$\hat{\mathbf{a}} = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{a}}|^2 = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} \sum_{n=1}^N |r_n - \tilde{a}_n|^2$$

n-de term hangt enkel van  $\tilde{a}_n$  af  $\Rightarrow$  elke term afzonderlijk minimaliseren

$$\hat{a}_n = \min_{\tilde{a} \in C} |r_n - \tilde{a}|^2 = \max_{\tilde{a} \in C} (2\tilde{a} \operatorname{Re}[r_n]) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}[r_n])$$

# Bovengrens op BER (6)

## Voorbeeld 1 (vervolg)

$$\hat{a}_n = \min_{\tilde{a} \in C} |r_n - \tilde{a}|^2 = \max_{\tilde{a} \in C} (2\tilde{a} \operatorname{Re}[r_n]) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}[r_n])$$

$$\operatorname{Re}[r_n] = a_n + \operatorname{Re}[w_n] \quad \operatorname{Re}[w_n] \sim N(0, \sigma_0^2)$$

Exacte berekening BER (eenvoudig, omdat  $s(a) = a$  en  $a_n \in \{-1, 1\}$ )

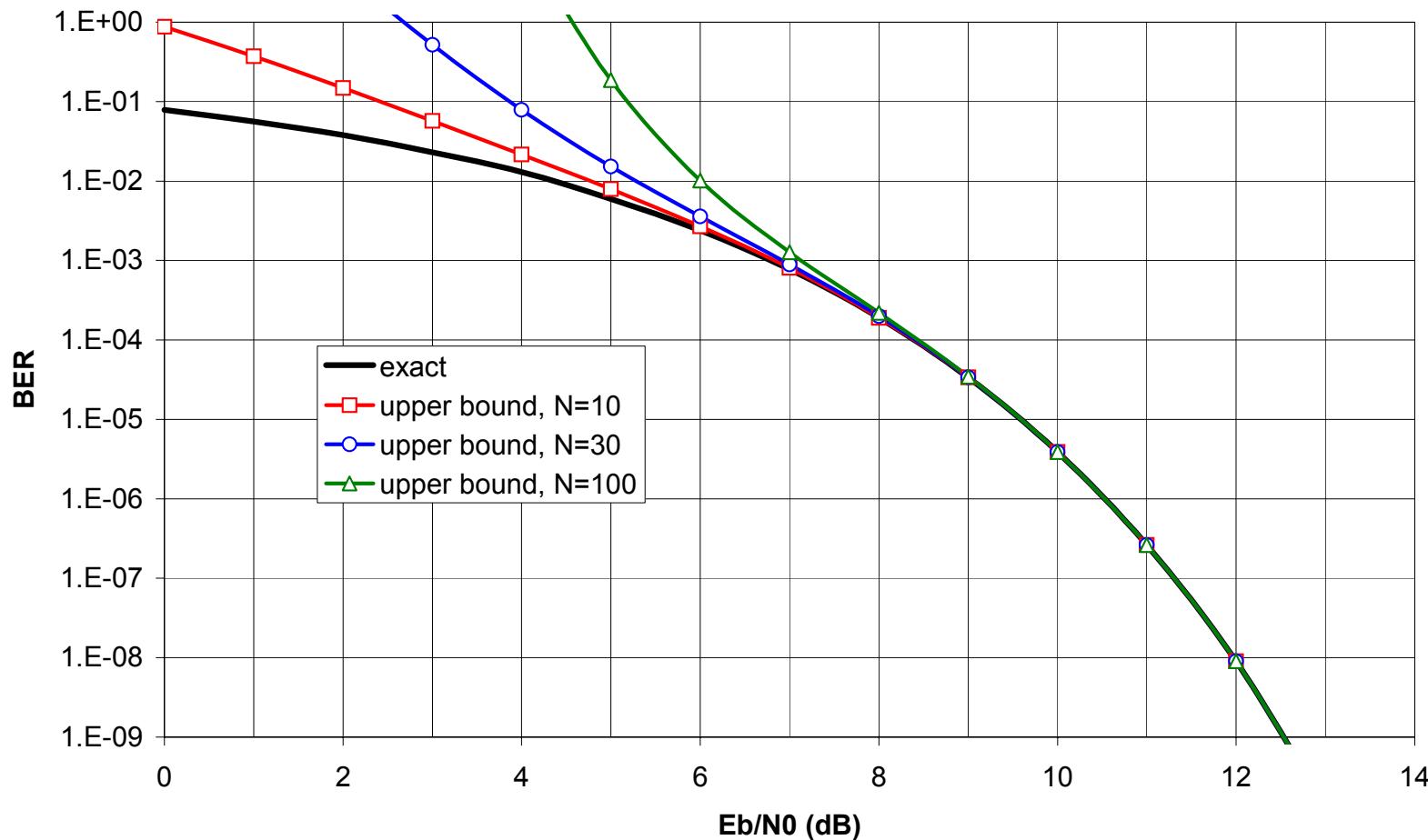
BER m.b.t. n-de symbool :

$$\begin{aligned} \operatorname{BER}_n &= \frac{1}{2} \Pr[\hat{a}_n = 1 | a_n = -1] + \frac{1}{2} \Pr[\hat{a}_n = -1 | a_n = 1] \\ &= \frac{1}{2} \Pr[-1 + \operatorname{Re}[w_n] > 0] + \frac{1}{2} \Pr[1 + \operatorname{Re}[w_n] < 0] \\ &= Q\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{BER} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \operatorname{BER}_n = Q\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) = \text{dominante term in } \operatorname{BER}_{\text{up}}$$

# Bovengrens op BER (7)

## Voorbeeld 1 (vervolg)



# Bovengrens op BER (8)

## Voorbeeld 2

*scalaire* observatie :  $r = a + n$

$a \in C$  (M punten),  $E[|a|^2] = E_s$

$n \sim N_c(0, N_0)$

# Bovengrens op BER (8)

## Voorbeeld 2

scalaire observatie :  $r = a + n$

$a \in C$  ( $M$  even waarschijnlijke punten),  $E[|a|^2] = E_s$

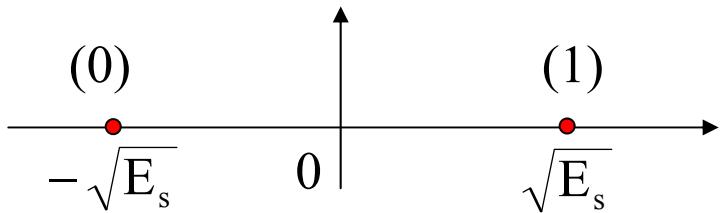
$n \sim N_c(0, N_0)$

$$\Rightarrow \text{BER} = \text{BER}_C(E_s/N_0)$$

 constellatie

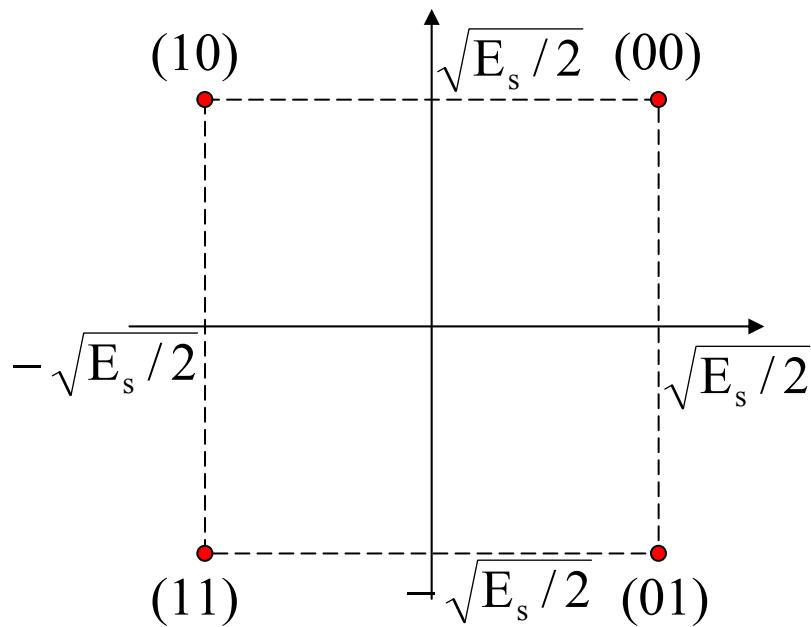
BER kan gemakkelijk **exact** berekend worden wanneer  
decisielijnen evenwijdig zijn en/of loodrecht op elkaar staan  
( $M$ -PAM,  $M$ -QAM); exacte berekening moeilijk bij  $M$ -PSK met  $M > 4$

# Bovengrens op BER (9)



$$\left. \text{BER}_{2\text{-PAM}}\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \right|_{E_s=E_b} = \left. \text{BER}_{2\text{-PSK}}\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \right|_{E_s=E_b}$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



$$\left. \text{BER}_{4\text{-QAM}}\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \right|_{E_s=2E_b} = \left. \text{BER}_{4\text{-PSK}}\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \right|_{E_s=2E_b}$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

# Bovengrens op BER (10)

## Voorbeeld 2 (vervolg)

Willekeurige constellatie : bovengrens op BER (via PEP)

$$\text{BER}_C\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \leq \frac{1}{\log_2(M)} \cdot \frac{1}{M} \sum_{m,m'=1}^M n_b(\alpha_m, \alpha_{m'}) Q\left(\sqrt{\frac{e_{m,m'}^2}{2N_0}}\right)$$

$e_{m,m'} = |\alpha_m - \alpha_{m'}|$  Euclidische afstand tussen constellatiepunten  $\alpha_m$  en  $\alpha_{m'}$

$$\text{BER}_C\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \approx C \cdot Q\left(\sqrt{\frac{e_{\min}^2}{2N_0}}\right) + \text{smaller terms} \quad e_{\min} = \min_{i \neq j} e_{i,j} \quad \begin{array}{l} \text{minimale afstand ts.} \\ \text{constellatiepunten} \end{array}$$

$$C = \frac{1}{\log_2(M)} \cdot \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{\alpha_{m'} \in A_m} n_b(\alpha_m, \alpha_{m'}) \quad A_m = \{\alpha_{m'}, |\alpha_m - \alpha_{m'}| = e_{\min}\}$$

# Bovengrens op BER (11)

## Voorbeeld 2 (vervolg)

Speciaal geval : Gray-mapping

(constellatiepunten op afstand  $e_{\min}$  verschillen in 1 bit)

$$\text{BER}_C\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \approx C \cdot Q\left(\sqrt{\frac{e_{\min}^2}{2N_0}}\right) + \text{smaller terms}$$

$$C = \frac{1}{\log_2(M)} \cdot \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{\alpha_m' \in A_m} n_b(\alpha_m, \alpha_m')$$

$A_m = \{\alpha_m' \mid |\alpha_m - \alpha_m'| = e_{\min}\}$

= 1 (Gray-mapping)

$$C = \frac{1}{\log_2(M)} \cdot \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \#_m$$

$\#_m = \text{aantal elementen in } A_m$   
 $= \text{aantal buren van } \alpha_m \text{ op afstand } e_{\min}$

gemiddeld aantal buren op afstand  $e_{\min}$

# Continue-tijd Gaussiaanse observatie

$$r(t) = s(t; \mathbf{a}) + w(t) \quad w(t) \sim N_c(0, N_0 \delta(u))$$

Formules voor BER en BER<sub>up</sub> blijven gelden, met

$$d_{i,j}^2 = \int |s(t; \mathbf{a}_i) - s(t; \mathbf{a}_j)|^2 dt$$

in plaats van

$$d_{i,j}^2 = |s(\mathbf{a}_i) - s(\mathbf{a}_j)|^2 = \sum_{k=1}^K |s_k(\mathbf{a}_i) - s_k(\mathbf{a}_j)|^2$$

# **Lineaire digitale modulatie**

- Observatiemodel : discrete tijd, continue tijd
- Voldoende statistiek
- ML detectie, BER
- Symbool-per symbool ontvangers

# **Lineaire digitale modulatie : observatiemodel**

# Observatiemodel : discrete tijd

Gaussiaans observatiemodel :  $\mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{a}) + \mathbf{w}$

$\mathbf{r}$  : dimensie Kx1

$$\mathbf{s}(\mathbf{a}) = \mathbf{H}\mathbf{a} = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{h}_n = a_1 \mathbf{h}_1 + a_2 \mathbf{h}_2 + \cdots + a_N \mathbf{h}_N$$

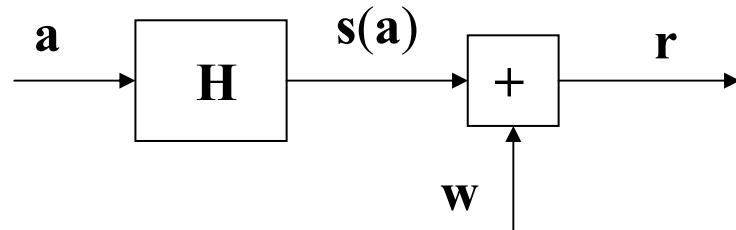
signaalvector  $\mathbf{s}(\mathbf{a})$  lineair  
in symboolvector  $\mathbf{a}$

$$s_k(\mathbf{a}) = \sum_{n=1}^N H_{k,n} a_n$$

$\mathbf{a}$  : dimensie Nx1,  $a_n \in C$ ,  $E[|a_n|^2] = E_s$

$\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_N)$  : dimensie KxN

$$\mathbf{w} \sim N_c(0, N_0 \mathbf{I}_K) \quad N_0 = 2\sigma_0^2$$



kolommen  $\{\mathbf{h}_n\}$  zijn *lineair onafhankelijke* eenheidsvectoren ( $K \geq N$ ) :  $|\mathbf{h}_n| = 1$   
 $\Rightarrow$  verschillende symboolvectoren  $\mathbf{a}$  leiden tot verschillende signaalvectoren  $\mathbf{s}(\mathbf{a})$

# Observatiemodel : continue tijd

Gaussiaans observatiemodel :  $r(t) = s(t;\mathbf{a}) + w(t)$

$$s(t;\mathbf{a}) = \sum_{n=1}^N a_n h_n(t) = a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) + \cdots + a_N h_N(t)$$

signaal  $s(t;\mathbf{a})$  lineair  
in symboolvector  $\mathbf{a}$

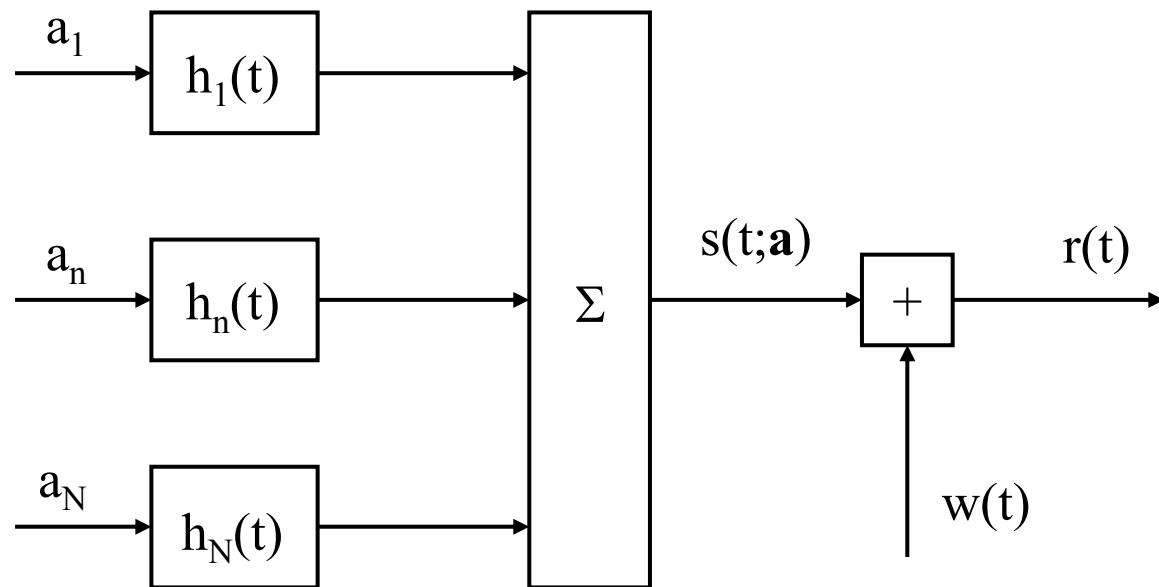
$$\mathbf{a} : N \times 1, a_n \in C \quad w(t) \sim N_c(0, N_0 \delta(u)) \quad N_0 = 2\sigma_0^2$$

pulsen  $\{h_n(t)\}$  zijn *lineair onafhankelijk*

$\Rightarrow$  verschillende symboolvectoren  $\mathbf{a}$  leiden tot verschillende signalen  $s(t;\mathbf{a})$

$$\text{pulsenergie} = 1 : \quad \int |h_n(t)|^2 dt = 1$$

# Observatiemodel : continue tijd



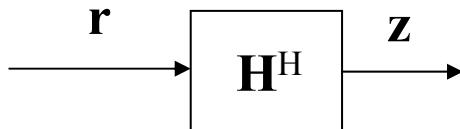
# **Lineaire digitale modulatie : voldoende statistiek**

# Voldoende statistiek : discrete-tijd observatie

Logaritmische kansfunctie :

$$-N_0 \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{a}) = |\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{a}|^2 = \mathbf{r}^H \mathbf{r} - 2 \operatorname{Re}[\mathbf{a}^H \mathbf{H}^H \mathbf{r}] + \mathbf{a}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{a}$$

Voldoende statistiek :  $\mathbf{z} = \mathbf{H}^H \mathbf{r}$



$$z_n = \mathbf{h}_n^H \mathbf{r} \quad \mathbf{h}_n : n\text{-de kolom van } \mathbf{H} \quad n = 1, 2, \dots, N (\leq K)$$

Logaritmische kansfunctie :  $-N_0 \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{a}) \propto -2 \operatorname{Re}[\mathbf{a}^H \mathbf{z}] + \mathbf{a}^H \mathbf{G} \mathbf{a} \quad \mathbf{G} = \mathbf{H}^H \mathbf{H}$

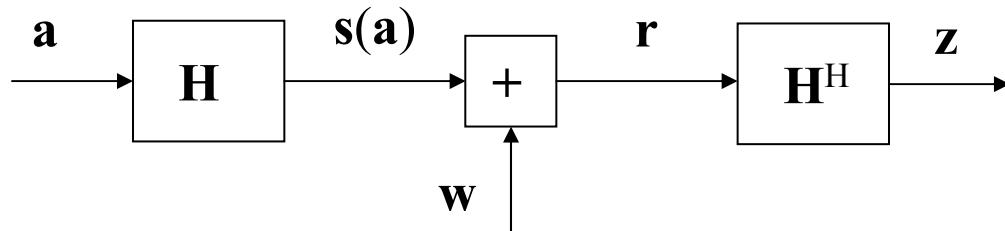
$$G_{n,n'} = \mathbf{h}_n^H \mathbf{h}_{n'} = \sum_k H_{k,n}^* H_{k,n'} \quad |\mathbf{h}_n|^2 = 1 \Rightarrow G_{n,n} = 1$$

# Voldoende statistiek : discrete-tijd observatie

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}^H(\mathbf{H}\mathbf{a} + \mathbf{w}) = \mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{n} \quad \mathbf{G} = \mathbf{H}^H\mathbf{H}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{H}^H\mathbf{w} \sim N_c(0, N_0\mathbf{G})$$

$$z_n = \sum_{n'=1}^N G_{n,n'} a_{n'} + n_n \quad G_{n,n'} = \mathbf{h}_n^H \mathbf{h}_{n'} = \sum_k (\mathbf{h}_n)_k^* (\mathbf{h}_{n'})_k = \sum_k H_{k,n}^* H_{k,n'}$$



# Voldoende statistiek : continue-tijd observatie

Logaritmische kansfunctie :

$$\begin{aligned}-N_0 \ln p(r | a) &= \int |r(t) - \sum_{n=1}^N a_n h_n(t)|^2 dt \\&= \int |r(t)|^2 dt - 2 \sum_{n=1}^N \operatorname{Re}\left[a_n^* \int h_n^*(t) r(t) dt\right] + \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N a_n^* a_{n'} \int h_n^*(t) h_{n'}(t) dt\end{aligned}$$

Voldoende statistiek :  $z_n = \int h_n^*(t) r(t) dt \quad n = 1, 2, \dots, N$

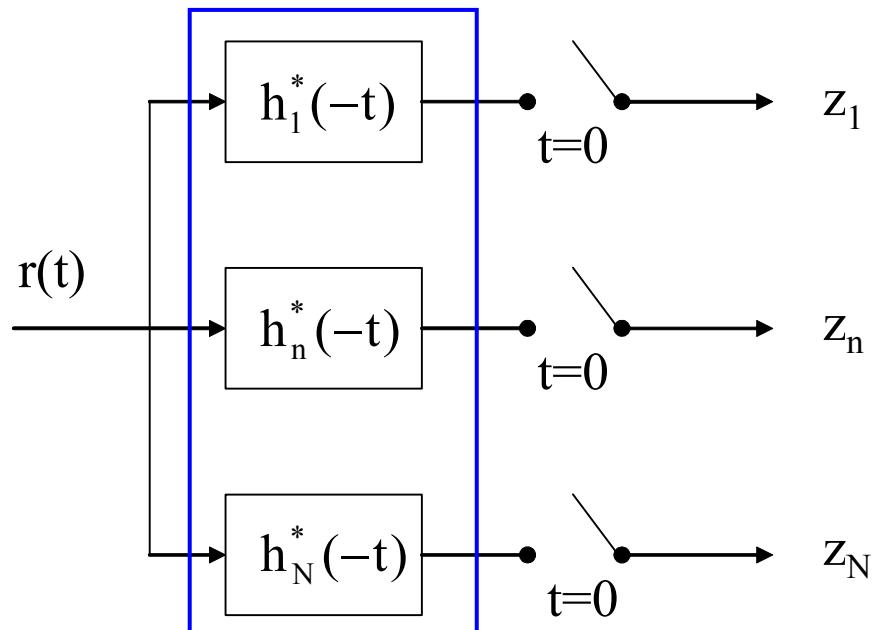
Logaritmische kansfunctie :

$$-N_0 \ln p(r | a) \propto -2 \operatorname{Re}[a^H z] + a^H G a \quad G_{n,n'} = \int h_n^*(t) h_{n'}(t) dt$$

$$\int |h_n(t)|^2 dt = 1 \Rightarrow G_{n,n} = 1$$

# Voldoende statistiek : continue-tijd observatie

Front-end ontvanger



“matched” filters

$$\begin{aligned} z_n &= \int h_n^*(u)r(u)du \\ &= \int h_n^*(-u)r(-u)du \\ &= \int h_n^*(-u)r(t-u)du \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

# Voldoende statistiek : continue-tijd observatie

$$z_n = \int h_n^*(t)r(t)dt = \int h_n^*(t) \left( \sum_{n'=1}^N a_{n'} h_{n'}(t) + w(t) \right) dt = \sum_{n'=1}^N G_{n,n'} a_{n'} + n_n$$

$$G_{n,n'} = \int h_n^*(t)h_{n'}(t)dt \quad \int |h_n(t)|^2 dt = 1 \Rightarrow G_{n,n} = 1$$

$$n_n = \int h_n^*(t)w(t)dt$$

$$E[n_n n_{n'}^*] = N_0 \int h_n^*(t)h_{n'}(t)dt = N_0 G_{n,n'}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{n} \quad \mathbf{n} \sim N_c(0, N_0 \mathbf{G})$$

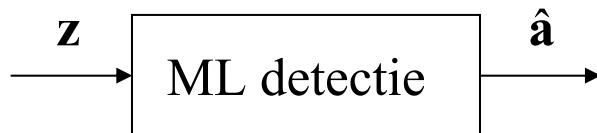
gelijkaardige betrekkingen als bij discrete-tijd observatie

# **Lineaire digitale modulatie : ML detectie**

# ML detectie

$$\text{ML detectie : } -N_0 \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{a}) \propto -2 \operatorname{Re}[\mathbf{a}^H \mathbf{z}] + \mathbf{a}^H \mathbf{G} \mathbf{a}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} (\tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{G} \tilde{\mathbf{a}} - 2 \operatorname{Re}[\tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{z}]) = \arg \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} \left( \sum_{n,n'=1}^N \tilde{a}_n^* G_{n,n'} \tilde{a}_{n'} - 2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N \tilde{a}_n^* z_n \right] \right)$$



kruistermen als  
 $\mathbf{G}$  niet-diagonaal

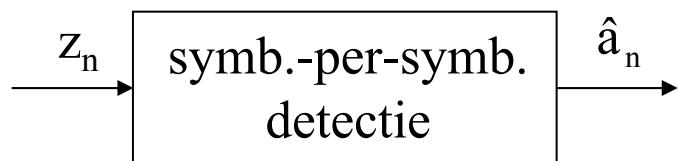
$\Rightarrow$  rekkencomplexiteit ML detectie evenredig met  $M^N$   
 $\Rightarrow$  exponentieel in aantal ( $N$ ) symbolen !!

# ML detectie voor *diagonale G*

$\mathbf{G}$  diagonaal  $\Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{I}_N$

ML detectie :  $\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} \sum_{n=1}^N \left( |\tilde{a}_n|^2 - 2 \operatorname{Re}[\tilde{a}_n^* z_n] \right)$       geen kruistermen !

$\Rightarrow$  symbool-per-symbool detectie       $\hat{a}_n = \arg \min_{\tilde{a} \in C} \left( |\tilde{a}|^2 - 2 \operatorname{Re}[\tilde{a}^* z_n] \right) = \arg \min_{\tilde{a} \in C} |z_n - \tilde{a}|^2$



$\mathbf{G} = \mathbf{I}_N \Rightarrow$  rekentijd ML detectie *lineair* in aantal ( $N$ ) symbolen

# Voorwaarde voor *diagonale G*

Discrete-tijd observatie :

$$\mathbf{G} = \mathbf{I}_N \text{ als kolommen } \mathbf{H} \text{ orthonormaal : } G_{n,n'} = \mathbf{h}_n^H \mathbf{h}_{n'} = \sum_{k=1}^K h_{k,n}^* h_{k,n'} = \delta_{n-n'}$$

Continue-tijd observatie :

$$\mathbf{G} = \mathbf{I}_N \text{ als pulsen } h_n(t) \text{ orthonormaal : } G_{n,n'} = \int h_n^*(t) h_{n'}(t) dt = \delta_{n-n'}$$

# Analyse voldoende statistiek

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{n} \quad \mathbf{n} \sim N_c(0, N_0 \mathbf{G})$$

niet-diagonale  $\mathbf{G}$  leidt tot :

- intersymboolinterferentie (ISI) en gecorreleerde ruistermen in  $\mathbf{z}$
- rekенcomplexiteit ML detectie exponentieel in  $N$

diagonale  $\mathbf{G}$  :  $\mathbf{G} = \mathbf{I}_N$

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{n}, \mathbf{n} \sim N_c(0, N_0 \mathbf{I}_N)$$

- geen ISI, ruiscomponenten statistisch onafhankelijk
- ML detectie is herleid tot symbol-per-symbol detectie (complexiteit  $\sim N$ )

# **Lineaire digitale modulatie : BER van ML ontvanger**

# BER bij ML detectie : diagonale $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} \text{ diagonaal} \Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{I}_N$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{n}, \mathbf{n} \sim \mathcal{N}_c(0, N_0 \mathbf{I}_N) \quad \text{componenten van } \mathbf{n} \text{ stat. onafh.}$$

$$z_n = a_n + n_n$$

$$\hat{a}_n = \arg \min_{\tilde{a} \in C} |z_n - \tilde{a}|^2 \quad \text{symbool-per-symbool detectie}$$

$$\boxed{\text{BER} = \text{BER}_C \left( \frac{E_s}{N_0} \right)} \quad \text{hangt } \textit{niet} \text{ af van de (orthonormale) } \{ \mathbf{h}_n \}$$

Bij hoge SNR wordt BER bepaald door  $e_{\min}$ ,  
de minimale Euclidische afstand tussen constellatiepunten  
(zie bovengrens gebaseerd op PEP)

# BER bij ML detectie : niet-diagonale G

## Bovengrens op BER

$$\text{BER} \leq \text{BER}_{\text{up}} = \frac{M^{-N}}{N \cdot \log_2(M)} \sum_{i,j=1}^{M^N} N_b(\alpha_i, \alpha_j) Q\left(\frac{d_{i,j}}{2\sigma_0}\right)$$

$d_{i,j}$  : Euclidische afstand tussen **signaal**vectoren  $s(\alpha_i) = H\alpha_i$  en  $s(\alpha_j) = H\alpha_j$

$e_{i,j} = \alpha_i - \alpha_j$  verschil ts. **symbool**vectoren

$$d_{i,j}^2 = |H\alpha_i - H\alpha_j|^2 = |He_{i,j}|^2 = e_{i,j}^H H^H H e_{i,j} = e_{i,j}^H G e_{i,j}$$

BER bij hoge SNR bepaald door  $d_{\min}$        $d_{\min}^2 = \min_{\substack{i,j \\ i \neq j}} d_{i,j}^2$

Continue-tijd observatie :  $d_{i,j}^2 = \int \left| \sum_n h_n(t) (e_{i,j})_n \right|^2 dt = e_{i,j}^H G e_{i,j}$

# BER bij ML detectie : niet-diagonale G

## Bovengrens op $d_{\min}$

$$d_{\min}^2 = \min_{\substack{i,j \\ i \neq j}} d_{i,j}^2 = \min_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{e}_{i,j}^H \mathbf{G} \mathbf{e}_{i,j}$$

Beschouw twee symboolvectoren die in slechts 1 symbool verschillen, nl. op positie n :

$$\mathbf{e}_{i,j} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ (\boldsymbol{\alpha}_i)_n - (\boldsymbol{\alpha}_j)_n \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\text{Kies } |(\boldsymbol{\alpha}_i)_n - (\boldsymbol{\alpha}_j)_n| = e_{\min}$$

$e_{\min}$  : minimale afstand ts. constellatiepunten

$$\Rightarrow d_{i,j} = e_{\min}$$

$$\Rightarrow d_{\min} \leq e_{\min}$$

BER (bij hoge  $E_s/N_0$ )  
niet lager dan bij  
diagonale G

# BER bij ML detectie : niet-diagonale G

## “Genie” benedengrens op BER (1)

$$\text{BER} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{BER}_n$$

benedengrens op  $\text{BER}_n \Rightarrow$  benedengrens  $\text{BER}_{\text{low}}$  op BER

Stel :  $\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{a} + \mathbf{w}$ ,  $\{a_n, n' \neq n\}$  gekend aan ontvangerzijde (“genie”)  
 $\Rightarrow$  BER van “genie” ontvanger is benedengrens op werkelijke  $\text{BER}_n$

Inverteerbare transformatie : bijdrage gekende symbolen aftrekken van  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \sum_{n' \neq n} a_{n'} \mathbf{h}_{n'} \Rightarrow \mathbf{r}' = a_n \mathbf{h}_n + \mathbf{w}$$

ML-detectie van  $a_n$  op basis van  $\mathbf{r}'$

# BER bij ML detectie : niet-diagonale G

## “Genie” benedengrens op BER (2)

ML-detectie van  $a_n$  op basis van  $\mathbf{r}'$                                $N_0 = 2\sigma_0^2$

$$\mathbf{r}' = a_n \mathbf{h}_n + \mathbf{w}$$

$$\ln p(\mathbf{r}' | a_n) \propto \frac{-1}{2\sigma_0^2} |\mathbf{r}' - a_n \mathbf{h}_n|^2 \propto \frac{-1}{2\sigma_0^2} (|a_n|^2 - 2 \operatorname{Re}[a_n^* z_n']) \propto \frac{-1}{2\sigma_0^2} |z_n' - a_n|^2$$

voldoende statistiek :         $z_n' = \mathbf{h}_n^H \mathbf{r}' = a_n + \mathbf{h}_n^H \mathbf{w}$                      $\mathbf{h}_n^H \mathbf{w} \sim N_c(0, 2\sigma_0^2)$

decisieregel :         $\hat{a}_n = \arg \min_{\tilde{a}} |z_n - \tilde{a}|^2$

⇒ BER genie ontvanger =  $\text{BER}_C(E_s/N_0)$  (zelfde BER als bij diagonale G)

⇒  $\text{BER}_C(E_s/N_0) \leq \text{BER}_n$

$$\text{BER} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{BER}_n$$

$$\Rightarrow \text{BER}_{\text{low}} = \text{BER}_C(E_s/N_0) \leq \text{BER}$$

# BER bij ML detectie : niet-diagonale G

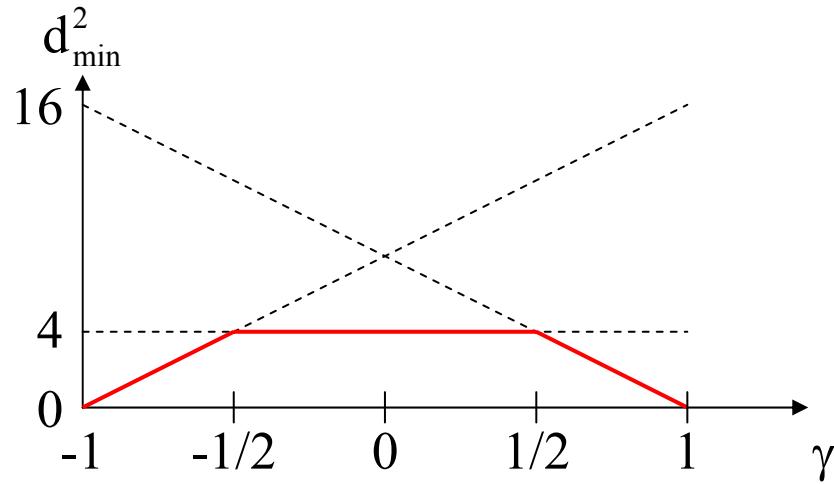
## Voorbeeld (1)

$$\mathbf{r} = a_1 \mathbf{h}_1 + a_2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{w} \quad a_n \in \{-1, 1\} \quad e_{\min}^2 = 4$$

$$\mathbf{h}_n \text{ reëel} \quad |\mathbf{h}_n| = 1 \quad \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_1 = \gamma \quad |\gamma| \leq 1 \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_{i,j}^2 = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1^2 + 2\gamma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2^2 = \begin{cases} 8(1+\gamma) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \pm(2,2) \\ 4 & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (0, \pm 2), (\pm 2, 0) \\ 8(1-\gamma) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \pm(2, -2) \end{cases}$$

$$d_{\min}^2 = \begin{cases} 8(1+\gamma) & -1 < \gamma < -0.5 \\ 4 & -0.5 < \gamma < 0.5 \\ 8(1-\gamma) & 0.5 < \gamma < 1 \end{cases}$$

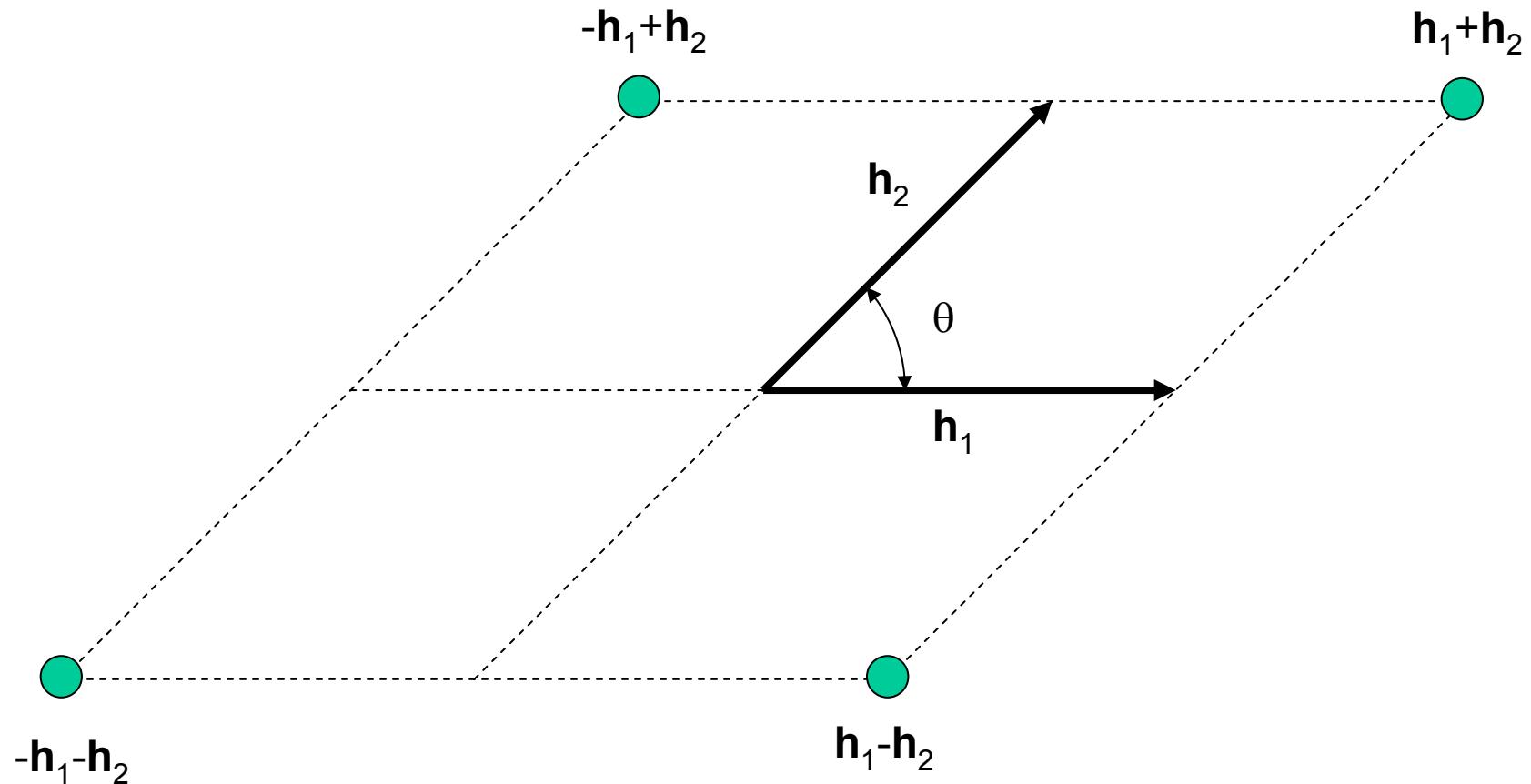


# BER bij ML detectie : niet-diagonale G

## Voorbeeld (2)

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \gamma = \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$$

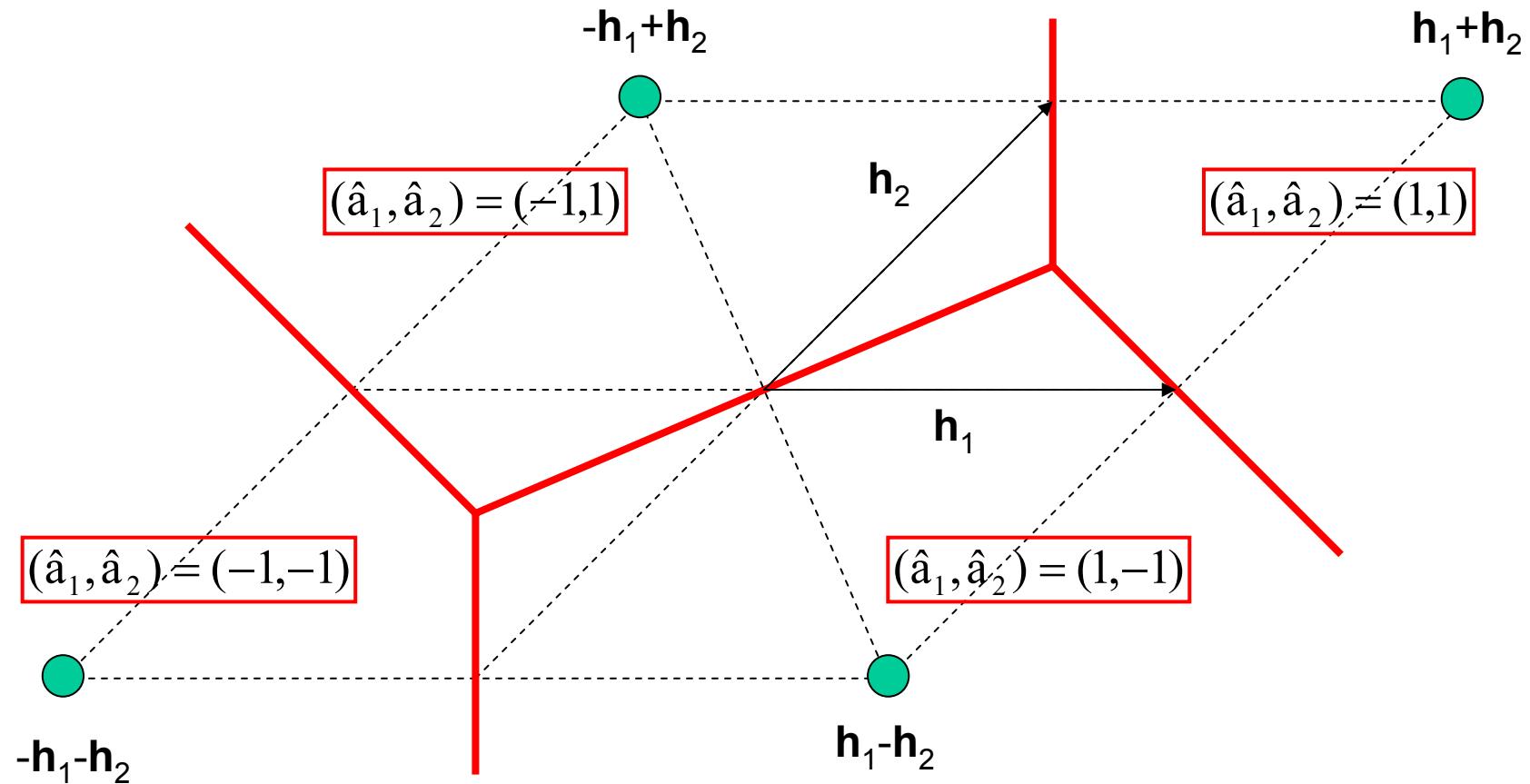
$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$



# BER bij ML detectie : niet-diagonale G

## Voorbeeld (3)

ML decisiegebieden

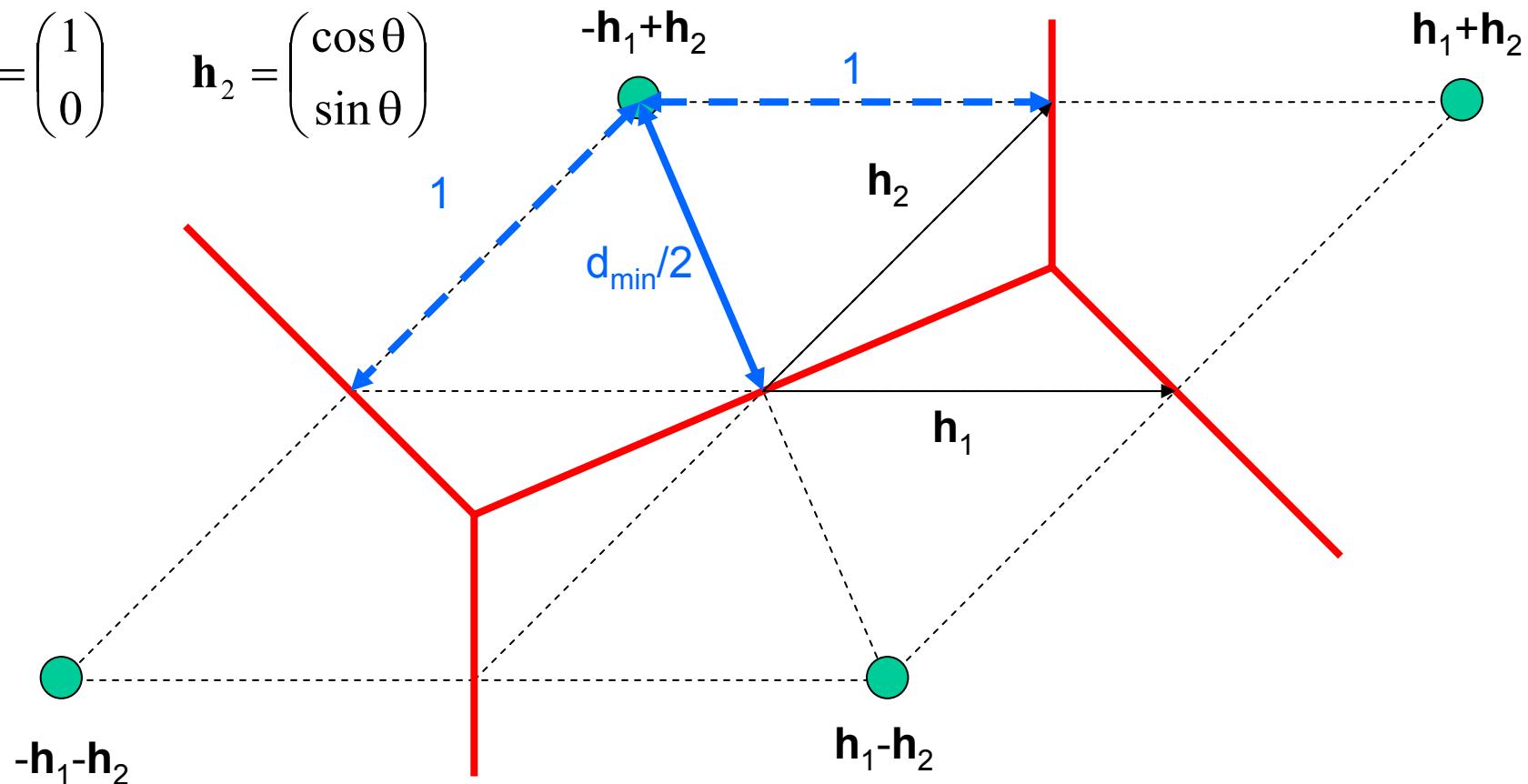


# BER bij ML detectie : niet-diagonale G

## Voorbeeld (4)

$$\text{BER}_{\text{up}} \approx \frac{1}{2} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_0}\right) \quad d_{\min}^2 = 8(1-\gamma) \approx 2.343 \Rightarrow \text{ruismarge} = \frac{d_{\min}}{2} \approx 0.765 < 1$$

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$



# BER bij ML detectie

## Samenvatting

- kolommen van  $\mathbf{H}$  orthonormaal ( $\mathbf{G} = \mathbf{I}_N$ )
  - ⇒ ML detectie wordt symbool-per-symbool detectie (complexiteit  $\propto N$ )
  - ⇒ BER bepaald door minimale afstand tussen constellatiepunten
  - ⇒  $\text{BER} = \text{BER}_C(E_b/N_0)$  = “genie” benedengrens
- kolommen van  $\mathbf{H}$  niet orthogonaal ( $\mathbf{G}$  niet-diagonaal)
  - ⇒ ML detectie zeer rekenintensief (complexiteit  $\propto M^N$ )
  - ⇒ BER bepaald door minimale afstand tussen signaalvectoren  
(≤ minimale afstand tussen constellatiepunten)
  - ⇒  $\text{BER}_{\text{low}}$  : genie ontvanger;  $\text{BER}_{\text{up}}$  : PEP
- Gelijkwaardige besluiten voor continue-tijd observatie  
(n-de kolom van  $\mathbf{H} \leftrightarrow$  n-de puls  $h_n(t)$ )

# **Lineaire digitale modulatie : symbool-per-symbool ontvangers**

- Negeren van interferentie
- Reductie van interferentie :  
lineaire ontvangers (ZF, MMSE)
- Reductie van interferentie :  
ontvangers met decision-feedback (ZF, MMSE)

complexiteit evenredig met  $N$

# Negeren van interferentie

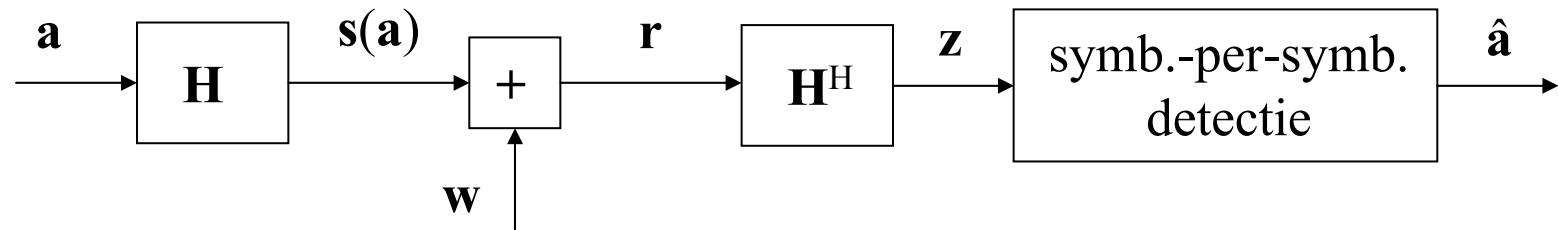
voldoende statistiek :  $\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{n}$      $\mathbf{n} \sim N_c(0, N_0\mathbf{G})$      $G_{n,n} = 1$

$$z_n = a_n + \underbrace{\sum_{m \neq n} g_{n,m} a_m}_{\text{ISI}_n} + n_n$$

$\text{ISI}_n$  : intersymboolinterferentie in  $z_n$   
 $n_n \sim N_c(0, N_0)$

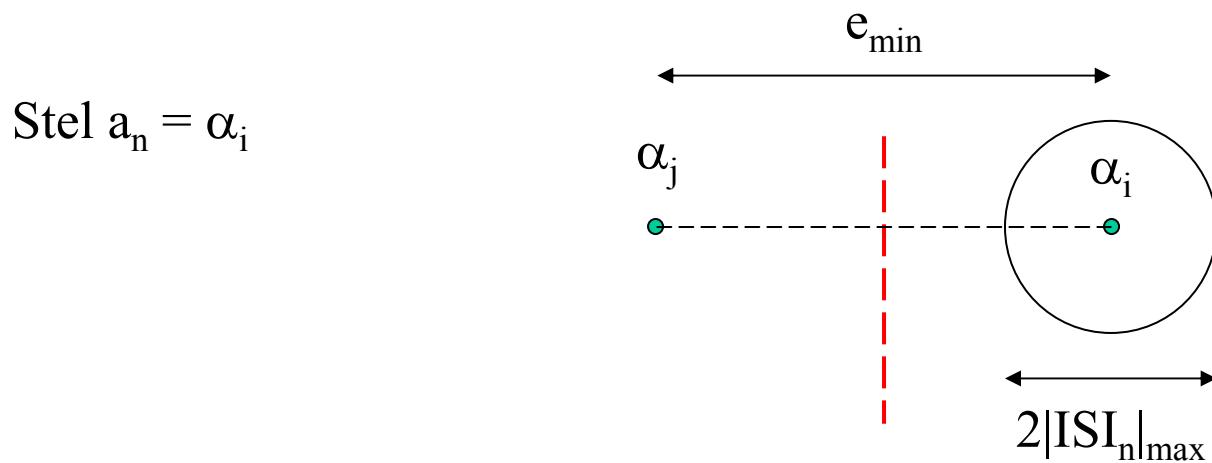
ontvanger negeert ISI en ruiscorrelatie in  $\mathbf{z}$ , en maakt de volgende decisie :

$$\hat{a}_n = \arg \min_{\tilde{a} \in C} |z_n - \tilde{a}|^2 \quad n = 1, \dots, N$$



# Negeren van interferentie

$$z_n = a_n + \underbrace{\sum_{m \neq n} g_{n,m} a_m}_{\text{ISI}_n} + n_n \quad | \text{ISI}_n | \leq |\text{ISI}_n|_{\max} = |\alpha|_{\max} \sum_{m \neq n} |g_{n,m}| \quad |\alpha|_{\max} = \max_{\alpha \in C} |\alpha|$$



$$\text{ruismarge}_n \approx \frac{e_{\min}}{2} - |\alpha|_{\max} \sum_{m \neq n} |g_{n,m}| \quad \text{aanwezigheid ISI reduceert ruismarge}$$

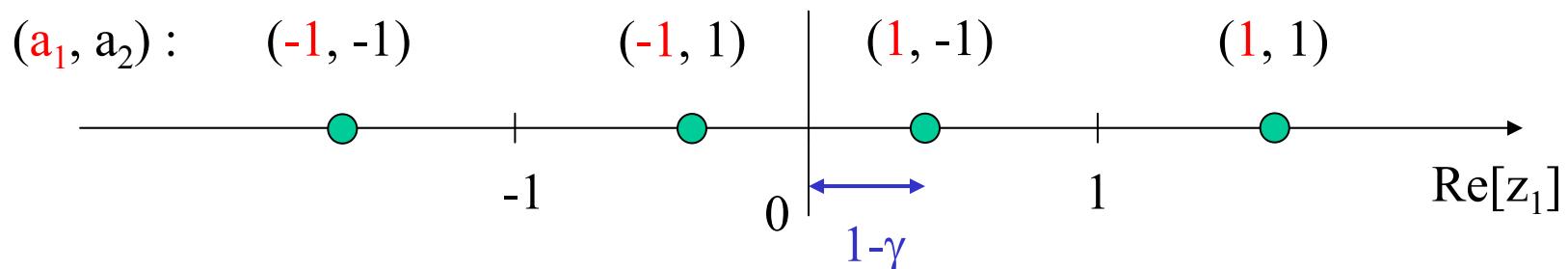
# Negeren van interferentie : Voorbeeld (1)

$$\mathbf{r} = a_1 \mathbf{h}_1 + a_2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{w} \quad a_n \in \{-1, 1\}$$

$$\mathbf{h}_n \text{ reëel} \quad |\mathbf{h}_n| = 1 \quad \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_1 = \gamma \quad |\gamma| \leq 1 \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + \gamma a_2 + n_1 \\ z_2 &= a_2 + \gamma a_1 + n_2 \end{aligned} \Rightarrow \text{ruismarge} = 1 - |\gamma| \quad N_0 = 2\sigma_0^2$$

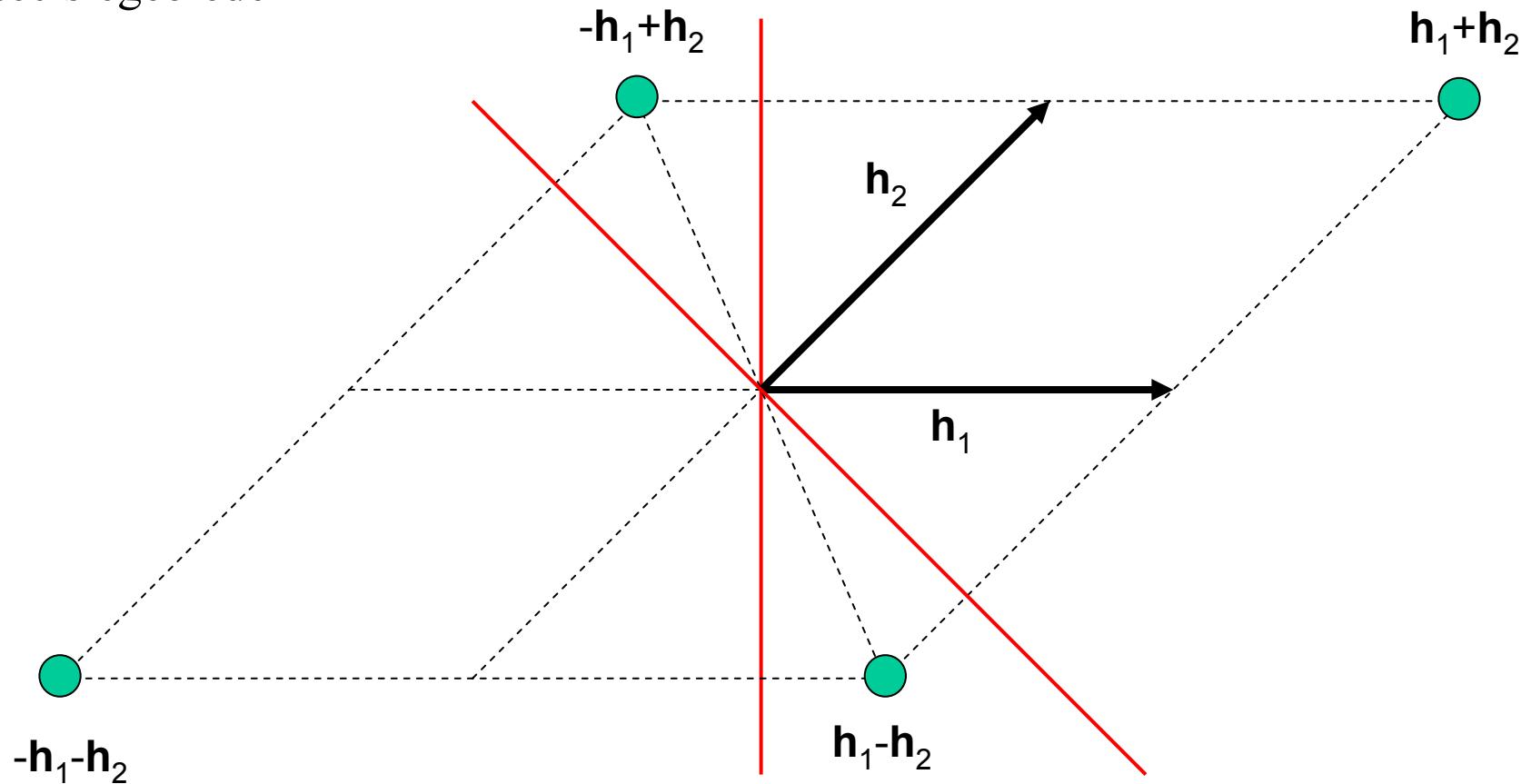
Stel  $\gamma > 0$



$$\text{BER} = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1-\gamma}{\sigma_0}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1+\gamma}{\sigma_0}\right) \quad (\gamma = 0 \Rightarrow \text{"genie" ondergrens op BER})$$

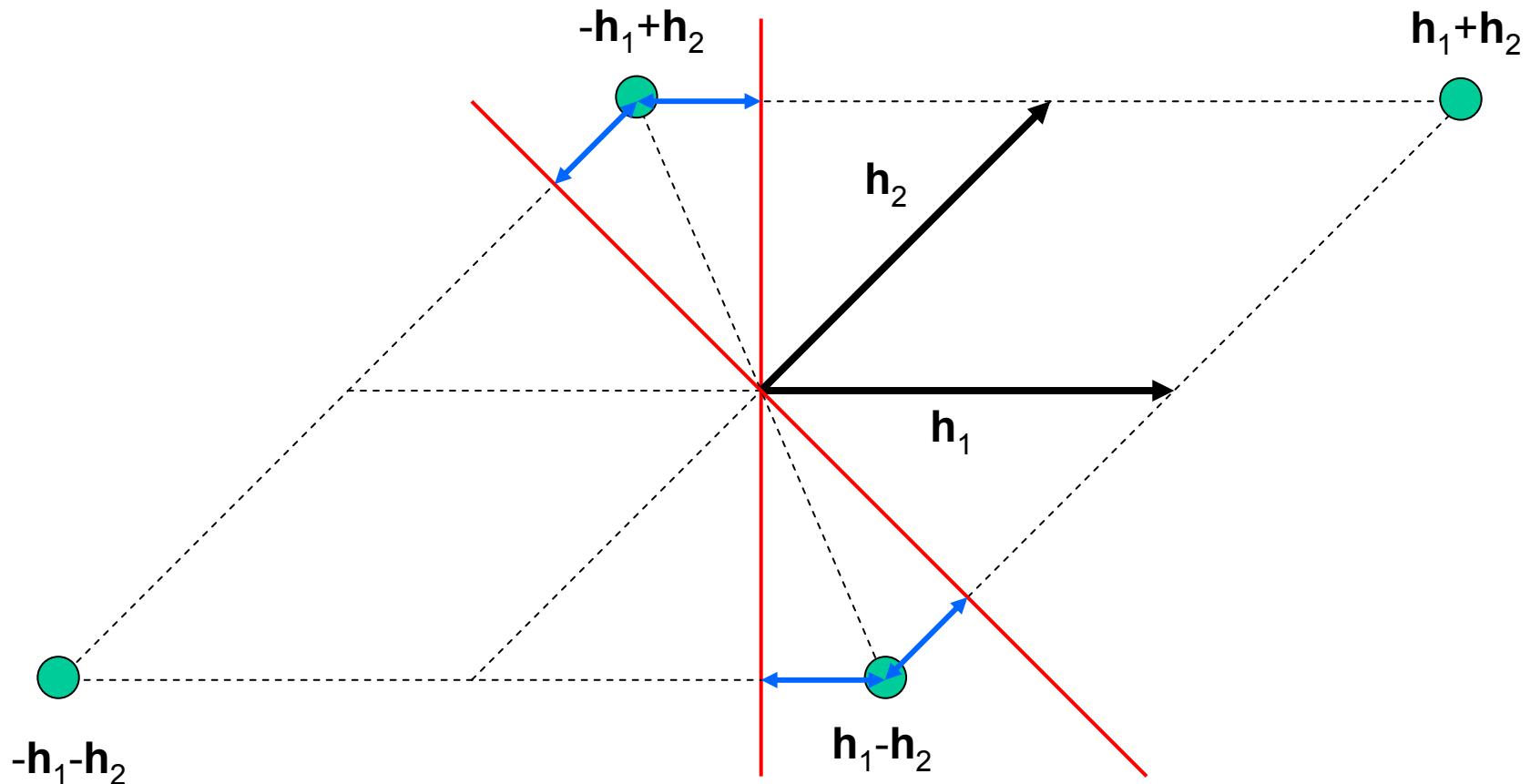
# Negeren van interferentie : Voorbeeld (2)

decisiegebieden



# Negeren van interferentie : Voorbeeld (3)

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{ruismarge : } 1 - \gamma = 1 - \cos(\theta) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.293$$



# Reductie van ISI : zero-forcing (ZF) lineaire ontvanger

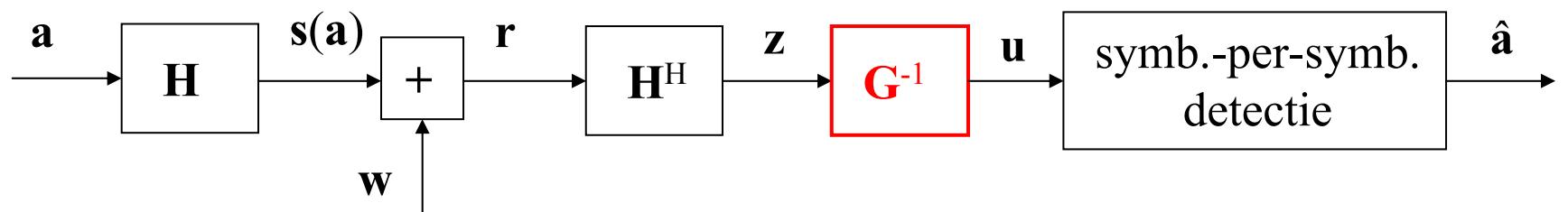
Lineaire bewerking op voldoende statistiek  $\mathbf{z}$  om ISI te **elimineren**

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{n} \quad \mathbf{n} \sim \mathcal{N}_c(0, N_0\mathbf{G})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{n} = \mathbf{a} + \mathbf{n}_u \quad \mathbf{n}_u = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{n} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{w} \sim \mathcal{N}_c(0, N_0\mathbf{G}^{-1})$$

correlatie van ruiscomponenten in  $\mathbf{n}_u$  wordt genegeerd bij de decisie

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \arg \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} |u_n - \tilde{a}|^2 \quad n = 1, \dots, N$$



# ZF lineaire ontvanger : Alternatieve interpretatie

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{r} = \mathbf{V}^H\mathbf{r} \quad \text{met } \mathbf{V} = \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$$
$$\Rightarrow \mathbf{v}_n \in \text{span}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_N)$$

$\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n^H \mathbf{r}$  projectie van  $\mathbf{r}$  op n-de kolom van  $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{V}^H\mathbf{r} = \mathbf{V}^H(\mathbf{H}\mathbf{a} + \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{a} + \mathbf{V}^H\mathbf{w} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{V}^H\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{V}^H\mathbf{w}\end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_n = \sum_{n'} (\mathbf{v}_n^H \mathbf{h}_{n'}) \mathbf{a}_{n'} + \mathbf{v}_n^H \mathbf{w} = \mathbf{a}_n + \mathbf{v}_n^H \mathbf{w} \quad E[|\mathbf{v}_n^H \mathbf{w}|^2] = N_0 |\mathbf{v}_n|^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_n^H \mathbf{h}_{n'} = \delta_{n-n'}$$

- $\mathbf{v}_n$  loodrecht op alle  $\mathbf{h}_n$ , met  $n' \neq n$

- $\mathbf{v}_n^H \mathbf{h}_n = 1$

# ZF lineaire ontvanger : Alternatieve interpretatie

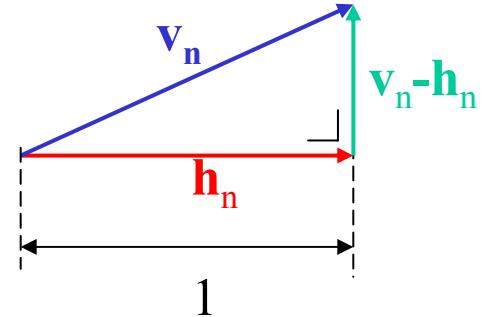
$$\mathbf{v}_n = \mathbf{h}_n + (\mathbf{v}_n - \mathbf{h}_n)$$

$$\mathbf{h}_n^H(\mathbf{v}_n - \mathbf{h}_n) = 1 - |\mathbf{h}_n|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{h}_n \perp (\mathbf{v}_n - \mathbf{h}_n)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{v}_n|^2 = |\mathbf{h}_n|^2 + |\mathbf{v}_n - \mathbf{h}_n|^2 \geq |\mathbf{h}_n|^2 = 1$$

(Pythagoras)



$$z_n = a_n + ISI_n + \mathbf{h}_n^H \mathbf{w}$$

$$E[|\mathbf{h}_n^H \mathbf{w}|^2] = N_0 |\mathbf{h}_n|^2 = N_0$$

$$u_n = a_n + \mathbf{v}_n^H \mathbf{w}$$

$$E[|\mathbf{v}_n^H \mathbf{w}|^2] = N_0 |\mathbf{v}_n|^2 \geq N_0$$

eliminatie van ISI leidt tot “*noise enhancement*” :  
er is meer ruis in  $u_n$  dan in  $z_n$  (maar  $u_n$  bevat geen ISI meer)

# ZF lineaire ontvanger : Voorbeeld (1)

$$\mathbf{r} = a_1 \mathbf{h}_1 + a_2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{w} \quad a_n \in \{-1, 1\}$$

$$\mathbf{h}_n \text{ reëel} \quad |\mathbf{h}_n| = 1 \quad \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_1 = \gamma \quad |\gamma| \leq 1$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{n}_u \quad \mathbf{n}_u \sim \mathcal{N}_c(\mathbf{N}_0 \mathbf{G}^{-1})$$

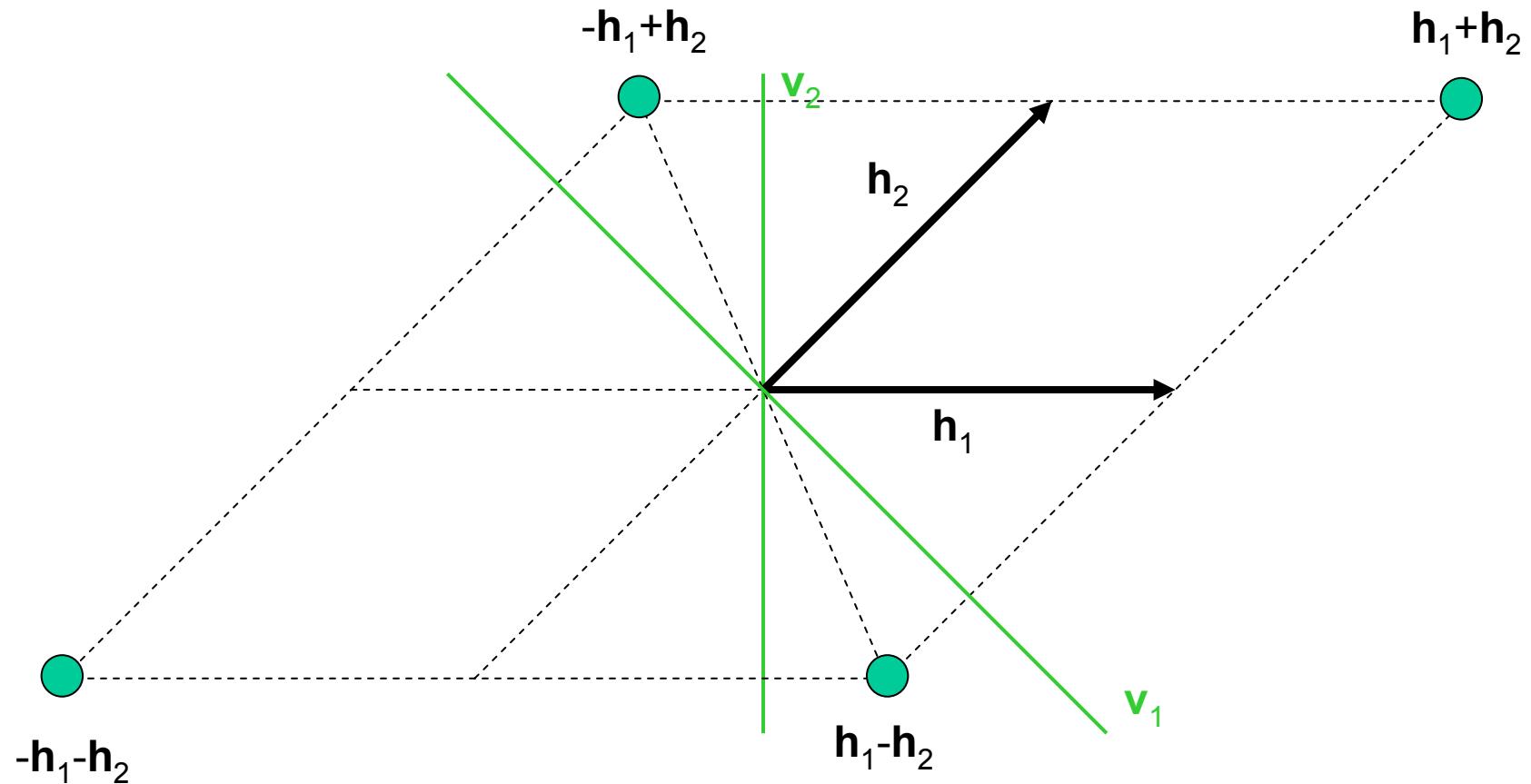
$$u_1 = a_1 + (\mathbf{n}_u)_1 \quad u_2 = a_2 + (\mathbf{n}_u)_2 \quad E[|(\mathbf{n}_u)_1|^2] = E[|(\mathbf{n}_u)_2|^2] = \frac{\mathbf{N}_0}{1-\gamma^2} \geq \mathbf{N}_0$$

$$\text{BER} = Q\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sigma_0}\right) \quad (\gamma = 0 \Rightarrow \text{"genie" ondergrens op BER})$$

$$\mathbf{N}_0 = 2\sigma_0^2$$

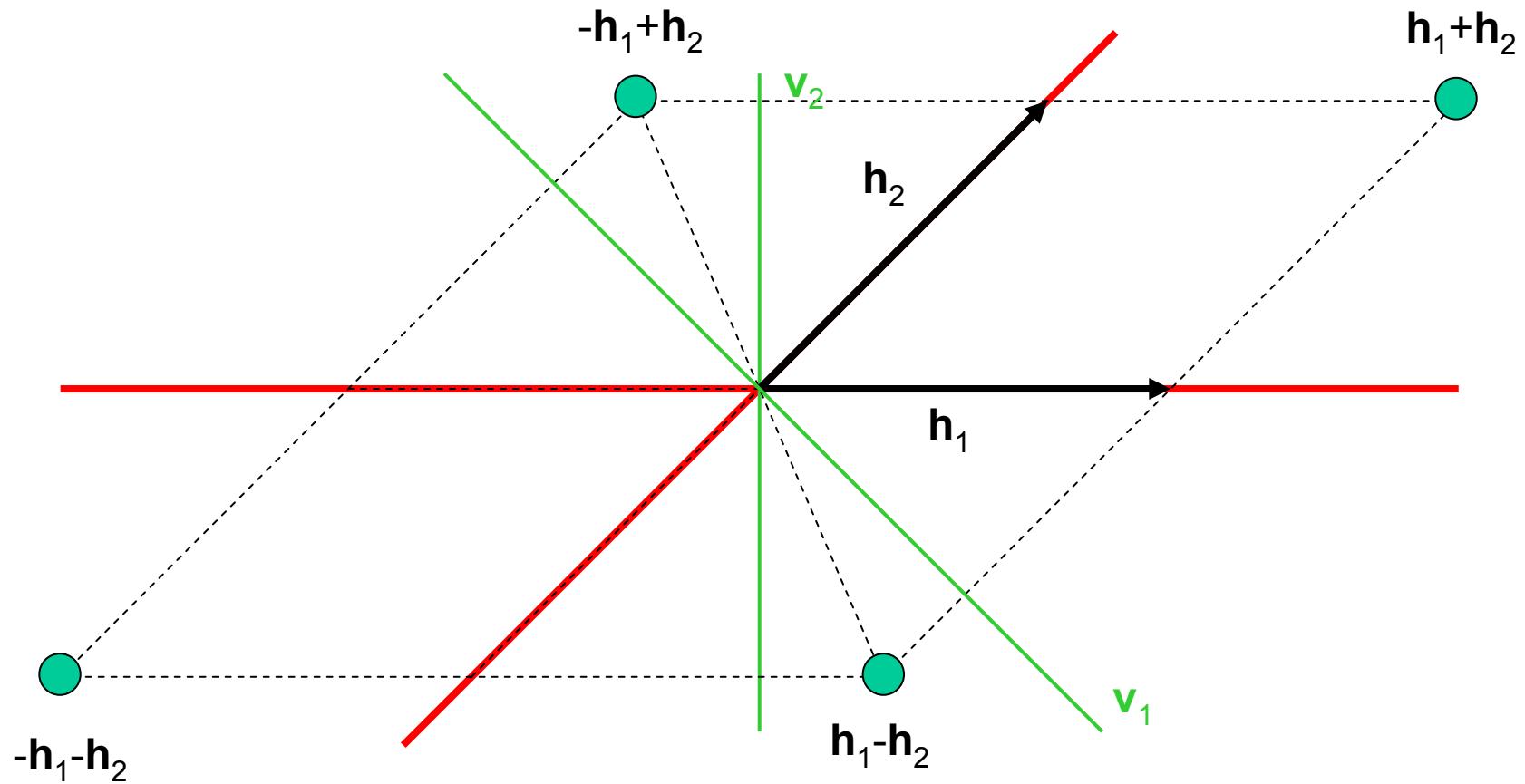
# ZF lineaire ontvanger : Voorbeeld (2)

richtingen  $\mathbf{v}_1$  ( $\perp \mathbf{h}_2$ ) en  $\mathbf{v}_2$  ( $\perp \mathbf{h}_1$ ) waarop  $\mathbf{r}$  wordt geprojecteerd



# ZF lineaire ontvanger : Voorbeeld (3)

decisiegebieden

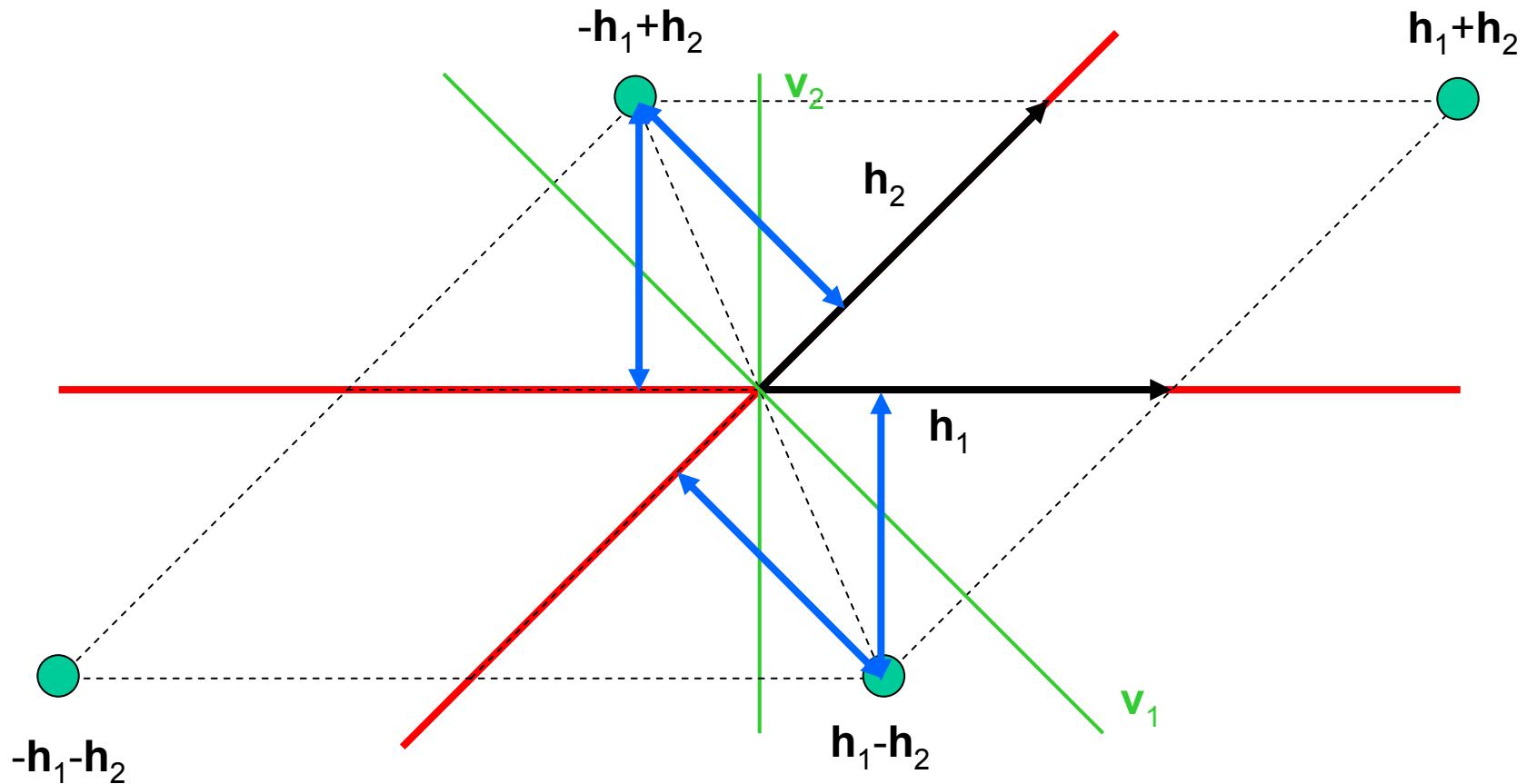


# ZF lineaire ontvanger : Voorbeeld (4)

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

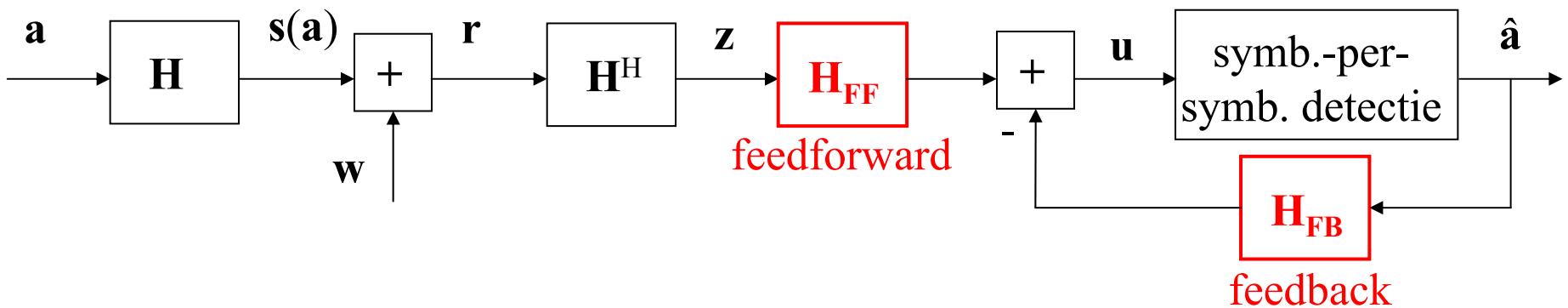
$$\text{ruismarge} = \sin(\theta) = \sqrt{1 - \gamma^2} \approx 0.707$$



# Reductie van ISI : ZF ontvanger met decision-feedback (DFB)

**Principe** Reeds gedetecteerde symbolen worden als correct beschouwd.  
 Hun bijdrage wordt afgetrokken van de ingang tot de detector.  
 Foutieve decisies kunnen leiden tot *foutpropagatie* !

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_{\text{FF}} \mathbf{z} - \mathbf{H}_{\text{FB}} \hat{\mathbf{a}} \quad \text{symbool-per-symbool decisie : } \hat{a}_n = \arg \min_{\tilde{a} \in C} |u_n - \tilde{a}|^2$$



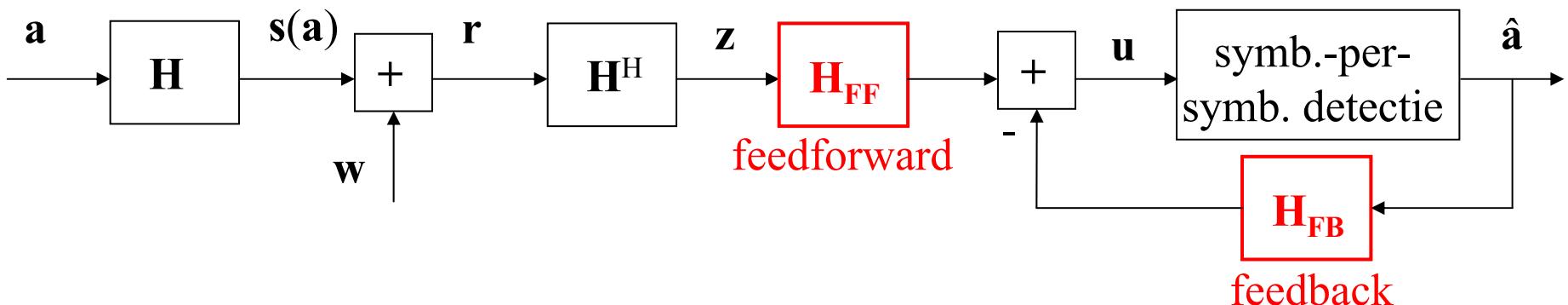
# Reductie van ISI : ZF ontvanger met decision-feedback (DFB)

**Principe** Reeds gedetecteerde symbolen worden als correct beschouwd.  
 Hun bijdrage wordt afgetrokken van de ingang tot de detector.  
 Foutieve decisies kunnen leiden tot *foutpropagatie* !

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_{\text{FF}} \mathbf{z} - \mathbf{H}_{\text{FB}} \mathbf{a}$$

symbool-per-symbool decisie :  $\hat{\mathbf{a}}_n = \arg \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in \mathcal{C}} | \mathbf{u}_n - \tilde{\mathbf{a}} |^2$

foutpropagatie verwaarloosd in analyse

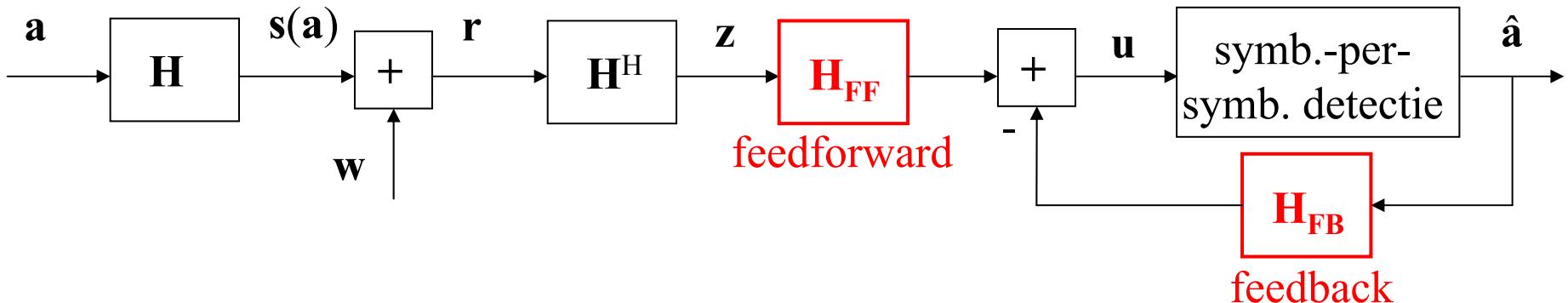


# Reductie van ISI : ZF ontvanger met decision-feedback (DFB)

**Principe** Reeds gedetecteerde symbolen worden als correct beschouwd.  
 Hun bijdrage wordt afgetrokken van de ingang tot de detector.  
 Foutieve decisies kunnen leiden tot *foutpropagatie* !

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_{\text{FF}} \mathbf{z} - \mathbf{H}_{\text{FB}} \mathbf{a} \quad \text{symbool-per-symbool decisie : } \hat{a}_n = \arg \min_{\tilde{a} \in C} |u_n - \tilde{a}|^2$$

$(\mathbf{H}_{\text{FF}} \mathbf{z})_n$  : bevat geen bijdragen van  $a_{n+1}, \dots, a_N$  wegens geschikte keuze  $\mathbf{H}_{\text{FF}}$  ;  
 bijdragen van  $a_1, \dots, a_{n-1}$  elimineren d.m.v  $(\mathbf{H}_{\text{FB}} \mathbf{a})_n$   
 $\Rightarrow u_n$  bevat enkel bijdrage van  $a_n$  en ruisbijdrage



# ZF DFB ontvanger : Alternatieve interpretatie (1)

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_{FF}\mathbf{z} - \mathbf{H}_{FB}\mathbf{a} = \mathbf{V}^H\mathbf{r} - \mathbf{H}_{FB}\mathbf{a} = (\mathbf{V}^H\mathbf{H} - \mathbf{H}_{FB})\mathbf{a} + \mathbf{V}^H\mathbf{w}$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{FF}^H \quad \Rightarrow \mathbf{v}_n \in \text{span}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_N)$$

$$u_n = \sum_{n'=1}^N (\mathbf{v}_n^H \mathbf{h}_{n'}) a_{n'} - \sum_{n'=1}^N (\mathbf{H}_{FB})_{n,n'} a_{n'} + \mathbf{v}_n^H \mathbf{w}$$

Bij gegeven  $\mathbf{V}$  :

$$(\mathbf{H}_{FB})_{n,n'} = \begin{cases} 0 & n' \geq n \\ \mathbf{v}_n^H \mathbf{h}_{n'} & n' < n \end{cases} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{wegen causaliteit}} \\ \xrightarrow{\text{ter eliminatie bijdragen van } a_1, \dots, a_{n-1} \text{ in } \mathbf{H}_{FF}\mathbf{z}} \end{array}$$

$$\Rightarrow u_n = (\mathbf{v}_n^H \mathbf{h}_n) a_n + \sum_{n'=n+1}^N (\mathbf{v}_n^H \mathbf{h}_{n'}) a_{n'} + \mathbf{v}_n^H \mathbf{w}$$

# ZF DFB ontvanger : Alternatieve interpretatie (2)

$$u_n = (\mathbf{v}_n^H \mathbf{h}_n) a_n + \sum_{n'=n+1}^N (\mathbf{v}_n^H \mathbf{h}_{n'}) a_{n'} + \mathbf{v}_n^H \mathbf{w}$$

$\mathbf{v}_n$  bepaald door volgende voorwaarden :

$$\mathbf{v}_n^H \mathbf{h}_n = 1 \Rightarrow u_n \text{ bevat } a_n \text{ met coëfficiënt} = 1$$

$$\mathbf{v}_n \perp (\mathbf{h}_{n+1}, \dots, \mathbf{h}_N) \Rightarrow u_n \text{ bevat geen bijdragen van } a_{n+1}, \dots, a_N$$

- $\Rightarrow \mathbf{v}_1$  : zelfde vector  $\mathbf{v}_1$  als bij ZF lineaire ontvanger (nog geen ISI verwijderd)
- $\Rightarrow \mathbf{v}_N = \mathbf{h}_N$  : zelfde vector als bij de “genie” ontvanger (alle ISI verwijderd)

$$|\mathbf{v}_n|^2 \geq |\mathbf{h}_n|^2 \text{ (zelfde redering als bij ZF)} \Rightarrow \text{noise enhancement}$$

# Structuur van $\mathbf{H}_{FB}$

$(\mathbf{H}_{FB}\mathbf{a})_n$  is lineaire combinatie van symbolen  $a_1, \dots, a_{n-1}$ ;  
geen bijdrage van nog niet gedetecteerde symbolen  $a_n, \dots, a_N$

$\Rightarrow \mathbf{H}_{FB}$  is NxN onderdriehoeksmatrix  
met nuldiagonaal

$$\mathbf{H}_{FB} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld :  $N = 3$

$$\mathbf{H}_{FB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{FB}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha a_1 \\ \gamma a_1 + \beta a_2 \end{pmatrix}$$

# ZF DFB ontvanger : Bepalen van $\mathbf{H}_{FF}$ en $\mathbf{H}_{FB}$ (1)

Eerst bepalen we  $\mathbf{H}_{FF}$  bij gegeven  $\mathbf{H}_{FB}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_{FF}\mathbf{z} - \mathbf{H}_{FB}\mathbf{a} = (\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G} - \mathbf{H}_{FB})\mathbf{a} + \mathbf{H}_{FF}\mathbf{n} = \mathbf{a} + \mathbf{H}_{FF}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G} - \mathbf{H}_{FB} = \mathbf{I}_N \Rightarrow \boxed{\mathbf{H}_{FF} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB})\mathbf{G}^{-1}}$$

# ZF DFB ontvanger : Bepalen van $\mathbf{H}_{FF}$ en $\mathbf{H}_{FB}$ (1)

Eerst bepalen we  $\mathbf{H}_{FF}$  bij gegeven  $\mathbf{H}_{FB}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_{FF}\mathbf{z} - \mathbf{H}_{FB}\mathbf{a} = (\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G} - \mathbf{H}_{FB})\mathbf{a} + \mathbf{H}_{FF}\mathbf{n} = \mathbf{a} + \mathbf{H}_{FF}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G} - \mathbf{H}_{FB} = \mathbf{I}_N \Rightarrow \boxed{\mathbf{H}_{FF} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB})\mathbf{G}^{-1}}$$

elimineert alle ISI

introducereert *causale* ISI (nl.  $\mathbf{H}_{FB}\mathbf{a}$ ), die  
achteraf d.m.v. feedback wordt verwijderd

Voorbeeld :  $N = 3$

$$\mathbf{H}_{FB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{FF}\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \gamma & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

# ZF DFB ontvanger : Bepalen van $\mathbf{H}_{\text{FF}}$ en $\mathbf{H}_{\text{FB}}$ (2)

ruisbijdrage tot  $\mathbf{u}$  :  $\mathbf{n}_u = \mathbf{H}_{\text{FF}}\mathbf{n} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})\mathbf{G}^{-1}\mathbf{n}$

$$E[\mathbf{n}_u \mathbf{n}_u^H] = N_0 (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}}) \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})^H$$

# ZF DFB ontvanger : Bepalen van $\mathbf{H}_{FF}$ en $\mathbf{H}_{FB}$ (2)

ruisbijdrage tot  $\mathbf{u}$  :  $\mathbf{n}_u = \mathbf{H}_{FF}\mathbf{n} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB})\mathbf{G}^{-1}\mathbf{n}$

$$E[\mathbf{n}_u \mathbf{n}_u^H] = N_0 (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB}) \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB})^H$$

onderdriehoeksmatrix  
met eenheidsdiagonaal

bovendriehoeksmatrix  
met eenheidsdiagonaal

variantie van  $(\mathbf{n}_u)_n = (E[\mathbf{n}_u \mathbf{n}_u^H])_{n,n}$  minimaliseren door geschikte  $\mathbf{H}_{FB}$

variantie minimaal wanneer  $E[\mathbf{n}_u \mathbf{n}_u^H]$  *diagonaal* (geen bewijs)

$\Rightarrow \mathbf{n}_u$  is wit (componenten van  $\mathbf{n}_u$  stat. onafh)

# ZF DFB ontvanger : Bepalen van $\mathbf{H}_{\text{FF}}$ en $\mathbf{H}_{\text{FB}}$ (3)

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^H, \text{ positief definit} \Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{F}_U \mathbf{D} \mathbf{F}_L \quad \mathbf{F}_U^H = \mathbf{F}_L \quad \mathbf{F}_L^H = \mathbf{F}_H$$

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}_L^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}_U^{-1} \quad \text{Cholesky-decompositie}$$

$\mathbf{D}$  : diagonale matrix met positieve diagonalelementen

$$\mathbf{F}_U = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

bovendriehoeksmatrices  
met eenheidsdiagonaal

$$\mathbf{F}_L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

onderdriehoeksmatrices  
met eenheidsdiagonaal

# ZF DFB ontvanger : Bepalen van $\mathbf{H}_{\text{FF}}$ en $\mathbf{H}_{\text{FB}}$ (4)

$$E[\mathbf{n}_u \mathbf{n}_u^H] = N_0 (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}}) \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})^H \quad \begin{array}{l} \text{diagonaal maken door} \\ \text{geschikte keuze van } \mathbf{H}_{\text{FB}} \end{array}$$

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}_L^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}_U^{-1} \quad \text{Kies} \quad \mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}} = \mathbf{F}_L$$

Feedback filter : 
$$\boxed{\mathbf{H}_{\text{FB}} = \mathbf{F}_L - \mathbf{I}_N}$$

Forward filter : 
$$\boxed{\mathbf{H}_{\text{FF}} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}}) \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}_L \mathbf{F}_L^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}_U^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}_U^{-1}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E[\mathbf{n}_u \mathbf{n}_u^H] &= N_0 (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}}) \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})^H \\ &= N_0 \mathbf{F}_L \mathbf{F}_L^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}_U^{-1} \mathbf{F}_U = N_0 \mathbf{D}^{-1} \end{aligned}} \quad \text{diagonaal !}$$

$$\Rightarrow \text{BER}_n = \text{BER}_C \left( \frac{d_n E_s}{N_0} \right) \quad \begin{array}{l} d_n : n\text{-de diagonalelement van } \mathbf{D} \\ d_n \leq 1 : \text{noise enhancement} \end{array}$$

# ZF DFB ontvanger : Voorbeeld (1)

$$\mathbf{r} = a_1 \mathbf{h}_1 + a_2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{w} \quad a_n \in \{-1, 1\}$$

$$\mathbf{h}_n \text{ reëel} \quad |\mathbf{h}_n| = 1 \quad \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_1 = \gamma \quad |\gamma| \leq 1$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \beta^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_U} \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_L} = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 |\beta|^2 & d_2 \beta^* \\ d_2 \beta & d_2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} d_2 &= 1, & \beta &= \beta^* = \gamma, \\ d_1 &= 1 - \gamma^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_U} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \gamma^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_L}$$

$$\text{BER} = \frac{1}{2} Q\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sigma_0}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) \quad \begin{aligned} &\text{gemiddelde van BER van ZF lineaire} \\ &\text{ontvanger en BER van "genie" ontvanger} \\ &(\gamma = 0 \Rightarrow \text{"genie" ondergrens op BER}) \end{aligned}$$

# ZF DFB ontvanger : Voorbeeld (2)

$$\mathbf{H}_{\text{FB}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{\text{FF}} = \underbrace{\frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_U^{-1}} = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1-\gamma^2 \end{pmatrix}$$

Verificatie :

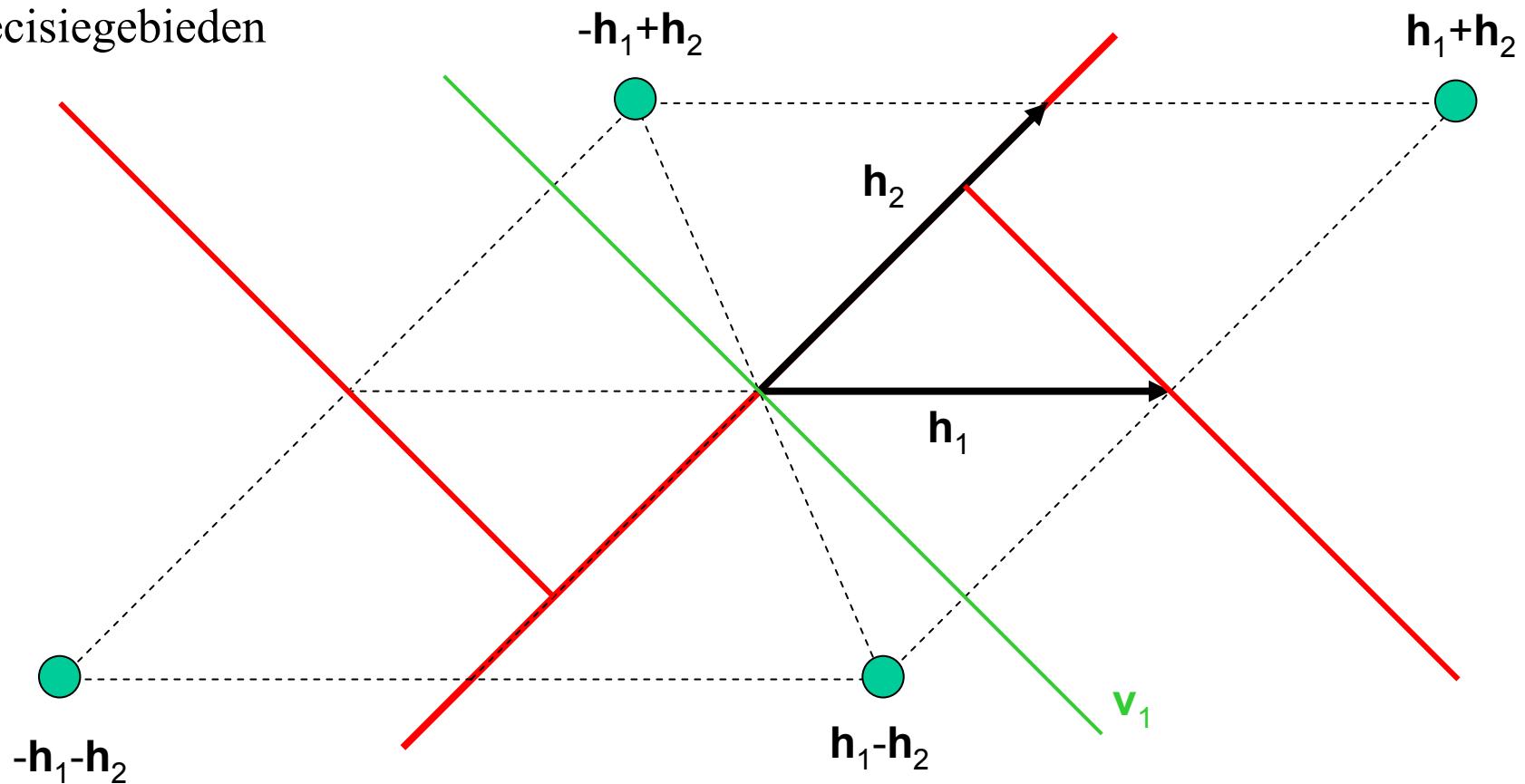
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{FF}} \mathbf{G} - \mathbf{H}_{\text{FB}} &= \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1-\gamma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad \text{geen ISI}$$

# ZF DFB ontvanger : Voorbeeld (3)

detectie  $a_1$  : teken van  $\mathbf{v}_1^T \mathbf{r}$  ;

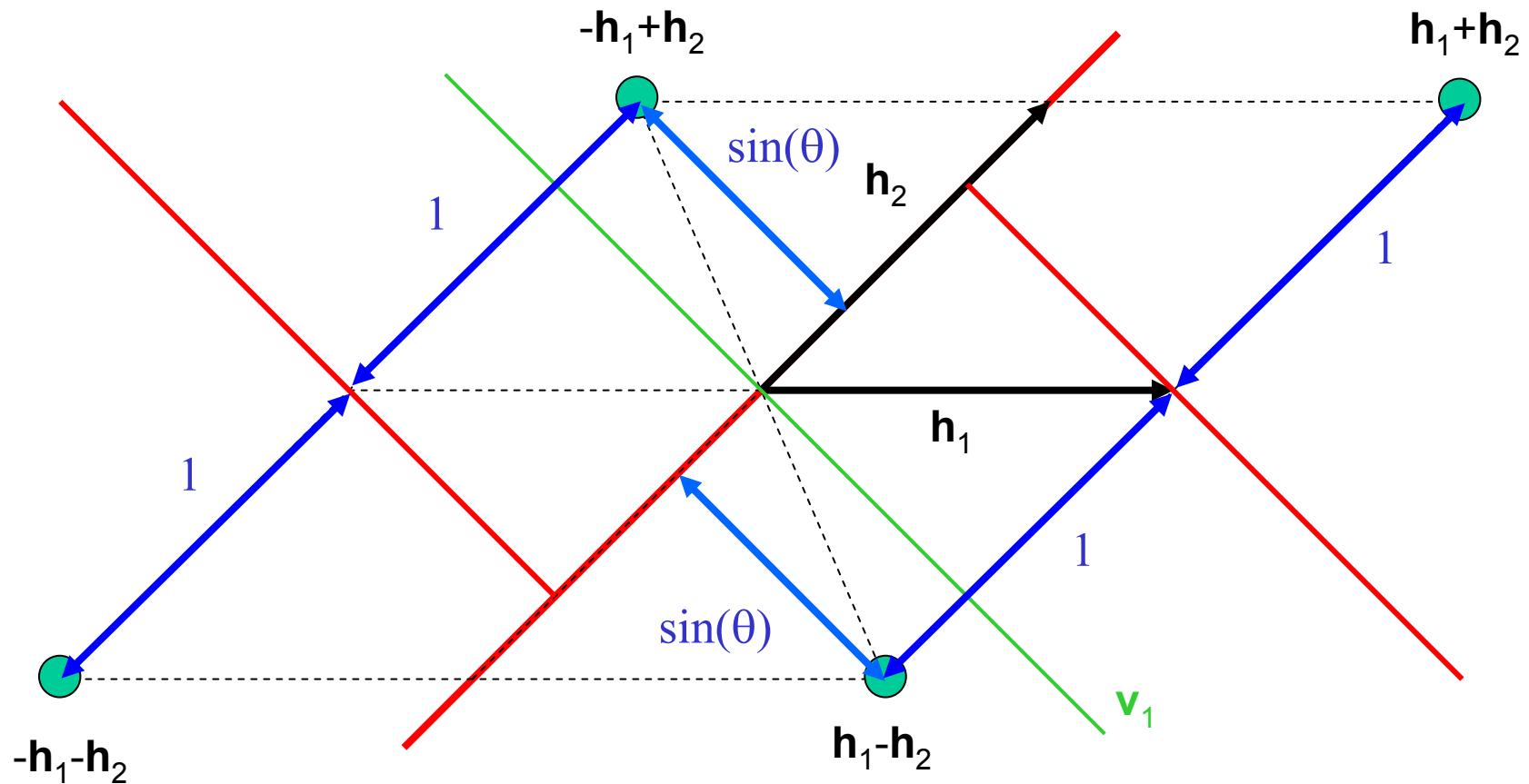
detectie  $a_2$  : teken van  $\mathbf{h}_2^T(\mathbf{r}-\mathbf{h}_1)$  als  $\mathbf{v}_1^T \mathbf{r} > 0$ , teken van  $\mathbf{h}_2^T(\mathbf{r}+\mathbf{h}_1)$  als  $\mathbf{v}_1^T \mathbf{r} < 0$

decisiegebieden



# ZF DFB ontvanger : Voorbeeld (4)

ruismarges



# Reductie van ISI : MMSE ontvanger

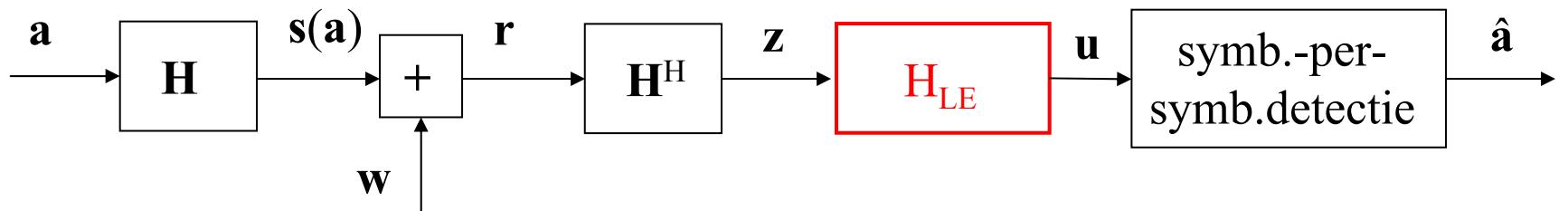
De ZF lineaire ontvanger en de ZF-DFB ontvanger leiden tot noise enhancement, ten gevolge van het volledig *elimineren* van ISI.

Deze noise enhancement kan gereduceerd worden door een kleine hoeveelheid residuele ISI toe te laten.

# MMSE lineaire ontvanger

$\mathbf{H}_{LE}$  wordt zo gekozen, dat de gemiddelde kwadratische afwijking (MSE)  $E[|\mathbf{u} - \mathbf{a}|^2]$  minimaal wordt.

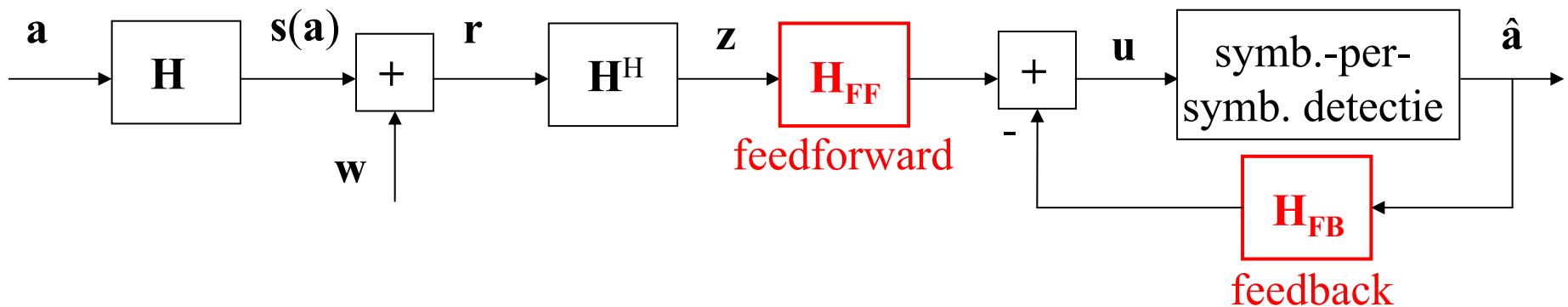
Omdat de n-de rij van  $\mathbf{H}_{LE}$  enkel op  $E[|u_n - a_n|^2]$  invloed heeft, leidt dit criterium automatisch tot de minimale waarde van elke afzonderlijke  $E[|u_n - a_n|^2]$ ,  $n = 1, \dots, N$



# MMSE DFB ontvanger

$\mathbf{H}_{FF}$  en  $\mathbf{H}_{FB}$  worden zo gekozen, dat de gemiddelde kwadratische afwijking (MSE)  $E[|\mathbf{u} - \mathbf{a}|^2]$  minimaal wordt.

Omdat de n-de rij van  $\mathbf{H}_{FF}$  en  $\mathbf{H}_{FB}$  enkel op  $E[|u_n - a_n|^2]$  invloed hebben, leidt dit criterium automatisch tot de minimale waarde van elke afzonderlijke  $E[|u_n - a_n|^2]$ ,  $n = 1, \dots, N$



# MMSE DFB ontvanger : Berekening van MSE

Definieer       $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{u} - \mathbf{a}$        $E_s = E[|a_n|^2]$

$$MSE = \frac{E[|\boldsymbol{\epsilon}|^2]}{E_s} = \frac{\text{Tr}(E[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^H])}{E_s} \quad MSE_n = \frac{E[|\epsilon_n|^2]}{E_s} = \frac{(E[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^H])_{n,n}}{E_s}$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{a} = (\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G} - (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB}))\mathbf{a} + \mathbf{H}_{FF}\mathbf{n} \quad \mathbf{n} \sim N_c(0, N_0\mathbf{G}) \quad \mu = \frac{N_0}{E_s}$$

$$\frac{E[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^H]}{E_s} = (\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G} - (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB}))(\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G} - (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB}))^H + \mu\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G}\mathbf{H}_{FF}^H$$

$$MSE = \text{Tr}\left((\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G} - (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB}))(\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G} - (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB}))^H + \mu\mathbf{H}_{FF}\mathbf{G}\mathbf{H}_{FF}^H\right)$$

Stel  $\mathbf{H}_{FB} = 0 \Rightarrow$  MSE voor lineaire ontvanger

# MMSE DFB ontvanger :

## Minimaliseren van MSE over $\mathbf{H}_{\text{FF}}$

$$\begin{aligned}\text{MSE} &= \text{Tr}\left((\mathbf{H}_{\text{FF}}\mathbf{G} - (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}}))(\mathbf{H}_{\text{FF}}\mathbf{G} - (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}}))^H + \mu\mathbf{H}_{\text{FF}}\mathbf{G}\mathbf{H}_{\text{FF}}^H\right) \\ &= \text{Tr}\left(\mathbf{H}_{\text{FF}}\mathbf{A}\mathbf{H}_{\text{FF}}^H - \mathbf{H}_{\text{FF}}\mathbf{B}^H - \mathbf{B}\mathbf{H}_{\text{FF}}^H + \mathbf{C}\right)\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G} + \mu\mathbf{G} = (\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)\mathbf{G} \quad \mathbf{A} : \text{positief definit}$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})\mathbf{G} \quad \mathbf{C} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})^H$$

$$\mathbf{H}_{\text{FF}}\mathbf{A}\mathbf{H}_{\text{FF}}^H - \mathbf{H}_{\text{FF}}\mathbf{B}^H - \mathbf{B}\mathbf{H}_{\text{FF}}^H + \mathbf{C} = (\mathbf{H}_{\text{FF}} - \mathbf{M})\mathbf{A}(\mathbf{H}_{\text{FF}} - \mathbf{M})^H + (\mathbf{C} - \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^H)$$

identificatie :  $\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{M} = \underbrace{(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}}_{=\mathbf{B}} \underbrace{(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)^{-1}}_{=\mathbf{A}^{-1}} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)^{-1}$$

# MMSE DFB ontvanger : Minimaliseren van MSE over $\mathbf{H}_{\text{FF}}$

$$\text{MSE} = \underbrace{\text{Tr}\left((\mathbf{H}_{\text{FF}} - \mathbf{M})\mathbf{A}(\mathbf{H}_{\text{FF}} - \mathbf{M})^H\right)}_{\geq 0} + \text{Tr}\left(\mathbf{C} - \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^H\right) \quad (\text{want } \mathbf{A} \text{ is positief definit})$$

Bij gegeven  $\mathbf{H}_{\text{FB}}$  wordt MSE minimaal voor  $\boxed{\mathbf{H}_{\text{FF}} = \mathbf{M} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)^{-1}}$

$$\Rightarrow \text{MSE} = \text{Tr}\left(\mathbf{C} - \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^H\right) \quad \mathbf{C} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})^H$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^H &= \underbrace{(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)^{-1}}_{=\mathbf{M}} \underbrace{(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)\mathbf{G}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)^{-1}(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})^H}_{=\mathbf{M}^H} \\ &= (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})\mathbf{G}(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)^{-1}(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})^H \\ &= (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N - \mu\mathbf{I}_N)(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)^{-1}(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})^H \\ &= (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})(\mathbf{I}_N - \mu(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)^{-1})(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})^H \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{MSE} = \text{Tr}\left(\mathbf{C} - \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^H\right) = \mu \text{Tr}\left((\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})(\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}_N)^{-1}(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{\text{FB}})^H\right)}$$

# MMSE lineaire ontvanger : Mimimale MSE

$$\text{MSE} = \text{Tr}(\mathbf{C} - \mathbf{MAM}^H) = \mu \text{Tr}((\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB})(\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1}(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB})^H)$$

MMSE lineaire ontvanger :  $\mathbf{H}_{FB} = 0$      $\boxed{\mathbf{H}_{FF} = (\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1}}$

$$\boxed{\text{MSE}_{\min, \text{lin}} = \mu \text{Tr}((\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1})} \quad \text{MSE}_{n, \min, \text{lin}} = \mu ((\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1})_{n,n}$$

Ingang detector :

$$\mathbf{u} = (\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{G} \mathbf{a} + (\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{n}$$

$$= (\mathbf{I} - \mu (\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1}) \mathbf{a} + (\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{u}_n = \underbrace{(1 - \mu ((\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1})_{n,n}) a_n}_{\text{nuttig}} + \underbrace{\mu \sum_{n' \neq n} ((\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1})_{n,n'} a_{n'}}_{\text{residuele ISI}} + \underbrace{((\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{n})_n}_{\text{ruis}}$$

# Lineaire ontvanger : MMSE versus ZF

Ter vergelijking : de ZF lineaire ontvanger gebruikt  $\mathbf{H}_{LE} = \mathbf{G}^{-1}$ , wat leidt tot

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} - \mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{n}$$

$$\Rightarrow \text{MSE}_{ZF} = \frac{\text{Tr}\left(E[\mathbf{G}^{-1}\mathbf{n}\mathbf{n}^H\mathbf{G}^{-1}]\right)}{E_s} = \mu \text{Tr}\left(\mathbf{G}^{-1}\right) \geq \text{MSE}_{min} = \mu \text{Tr}\left((\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1}\right)$$

$$\text{MSE}_{n,ZF} = \frac{\left(E[\mathbf{G}^{-1}\mathbf{n}\mathbf{n}^H\mathbf{G}^{-1}]\right)_{n,n}}{E_s} = \mu \left(\mathbf{G}^{-1}\right)_{n,n} \geq \text{MSE}_{n,min} = \mu \left((\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1}\right)_{n,n}$$

Voor hoge  $E_s/N_0$  (kleine  $\mu$ ) leiden de ZF lineaire ontvanger en de MMSE lineaire ontvanger tot nagenoeg dezelfde resultaten.

Voor lage  $E_s/N_0$  (grote  $\mu$ ) geeft de MMSE ontvanger betere resultaten.

# Lineaire ontvanger : MMSE versus ZF

## Voorbeeld (1)

$$\mathbf{r} = a_1 \mathbf{h}_1 + a_2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{w} \quad a_n \in \{-1, 1\}$$

$$\mathbf{h}_n \text{ reëel} \quad |\mathbf{h}_n| = 1 \quad \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_1 = \gamma \quad |\gamma| \leq 1$$

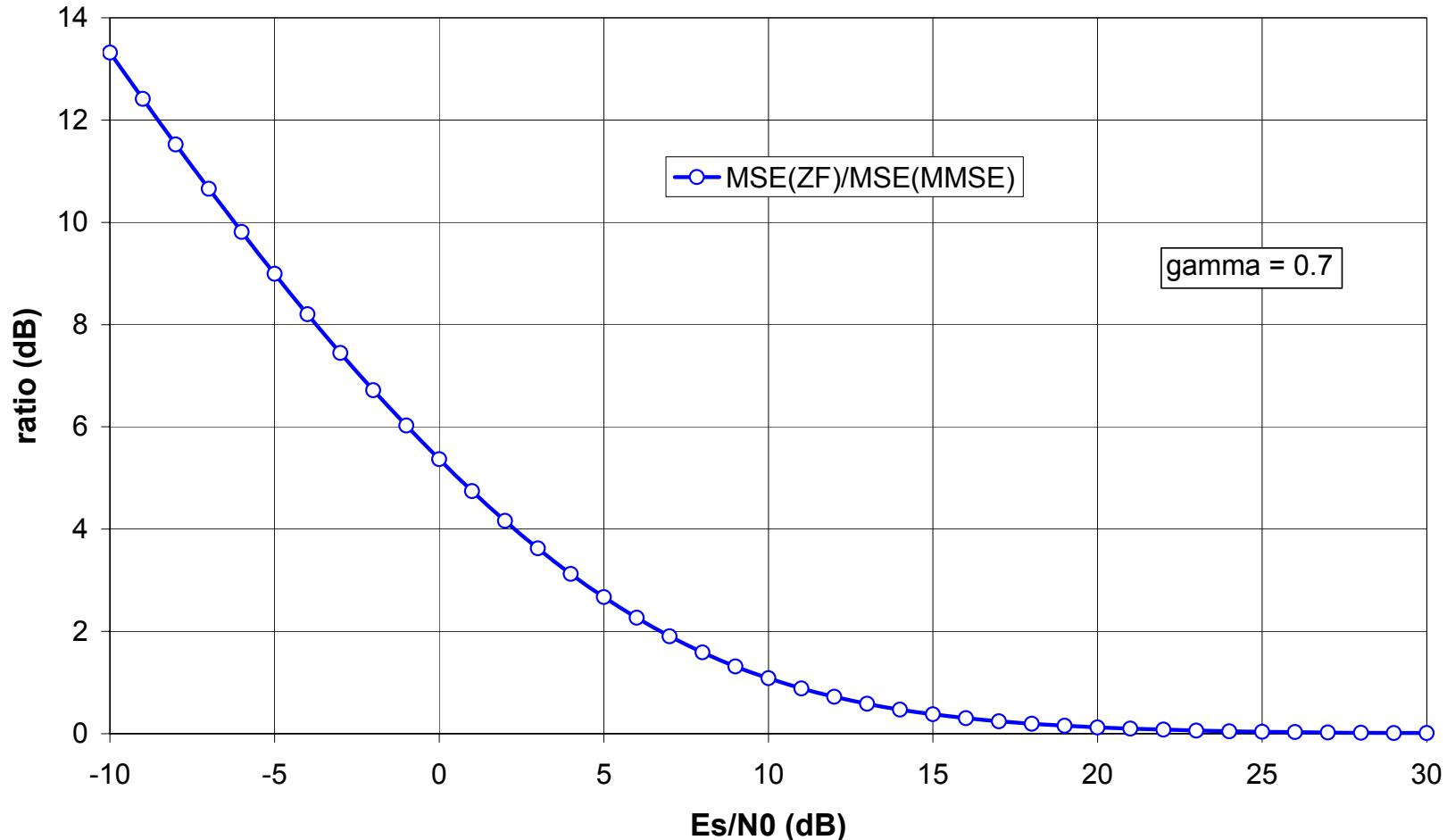
$$\text{ZF :} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{MSE}_{1,\text{ZF,lin}} = \text{MSE}_{2,\text{ZF,lin}} = \frac{\mu}{1-\gamma^2}$$

$$\text{MMSE :} \quad \mathbf{G} + \mu \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1+\mu & \gamma \\ \gamma & 1+\mu \end{pmatrix} \quad (\mathbf{G} + \mu \mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{(1+\mu)^2 - \gamma^2} \begin{pmatrix} 1+\mu & -\gamma \\ -\gamma & 1+\mu \end{pmatrix}$$

$$\text{MSE}_{1,\text{min,lin}} = \text{MSE}_{2,\text{min,lin}} = \frac{\mu(1+\mu)}{(1+\mu)^2 - \gamma^2} \leq \frac{\mu}{1-\gamma^2}$$

# Lineaire ontvanger : MMSE versus ZF Voorbeeld (2)



# MMSE DFB ontvanger : Minimaliseren van MSE over $\mathbf{H}_{FB}$

$$MSE = \text{Tr}(\mathbf{C} - \mathbf{MAM}^H) = \mu \text{Tr}((\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB})(\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1}(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB})^H)$$

MMSE DFB ontvanger : MSE nog optimaliseren over  $\mathbf{H}_{FB}$

(gelijkaardig als bij  
ZF DFB ontvanger)

Cholesky-decompositie van  $\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N$  :

$$\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N = \mathbf{F}'_U \mathbf{D}' \mathbf{F}'_L \quad (\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1} = \mathbf{F}'_L^{-1} \mathbf{D}'^{-1} \mathbf{F}'_U^{-1} \quad \mathbf{F}'_L = \mathbf{F}'_U^H$$

$\mathbf{F}'_L$  : onderdriehoeksmatrix  
met eenheidsdiagonaal

$\mathbf{D}'$  : diagonale matrix,  
positieve diagonalelementen

MSE minimaal voor

$$\boxed{\mathbf{H}_{FB} = \mathbf{F}'_L - \mathbf{I}_N}$$

$$\boxed{\mathbf{H}_{FF} = \underbrace{(\mathbf{I}_N + \mathbf{H}_{FB})}_{\mathbf{F}'_L} \underbrace{(\mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N)^{-1}}_{\mathbf{F}'_L^{-1} \mathbf{D}'^{-1} \mathbf{F}'_U^{-1}} = \mathbf{D}'^{-1} \mathbf{F}'_U^{-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{MSE_{min,DFB} = \mu \text{Tr}(\mathbf{D}'^{-1})}$$

$$MSE_{n,min,DFB} = \frac{\mu}{d'_n}$$

# **DFB ontvanger : MMSE versus ZF**

Ter vergelijking : de ZF + DFB ontvanger leidt tot      $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{H}_{FF}\mathbf{n}$

$$\Rightarrow \text{MSE}_{ZF,DFB} = \frac{\text{Tr}(E[\mathbf{H}_{FF}\mathbf{n}\mathbf{n}^H\mathbf{H}_{FF}^H])}{E_s} = \mu \text{Tr}(\mathbf{D}^{-1}) \geq \text{MSE}_{min,DFB} = \mu \text{Tr}(\mathbf{D}'^{-1})$$

$$\text{MSE}_{n,ZF,DFB} = \frac{\mu}{d_n} \geq \frac{\mu}{d'_n}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_U \mathbf{D} \mathbf{F}_L \quad \mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N = \mathbf{F}'_U \mathbf{D}' \mathbf{F}'_L$$

Voor hoge  $E_s/N_0$  (kleine  $\mu$ ) leiden de ZF+DFB ontvanger en de MMSE + DFB ontvanger tot nagenoeg dezelfde resultaten.

Voor lage  $E_s/N_0$  (grote  $\mu$ ) geeft de MMSE ontvanger betere resultaten.

# DFB ontvanger : MMSE versus ZF Voorbeeld (1)

$$\mathbf{r} = a_1 \mathbf{h}_1 + a_2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{w} \quad a_n \in \{-1, 1\}$$

$$\mathbf{h}_n \text{ reëel} \quad |\mathbf{h}_n| = 1 \quad \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_1 = \gamma \quad |\gamma| \leq 1$$

$$\text{ZF+DFB :} \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}_U \mathbf{D} \mathbf{F}_L \quad d_1 = 1 - \gamma^2 \quad d_2 = 1$$

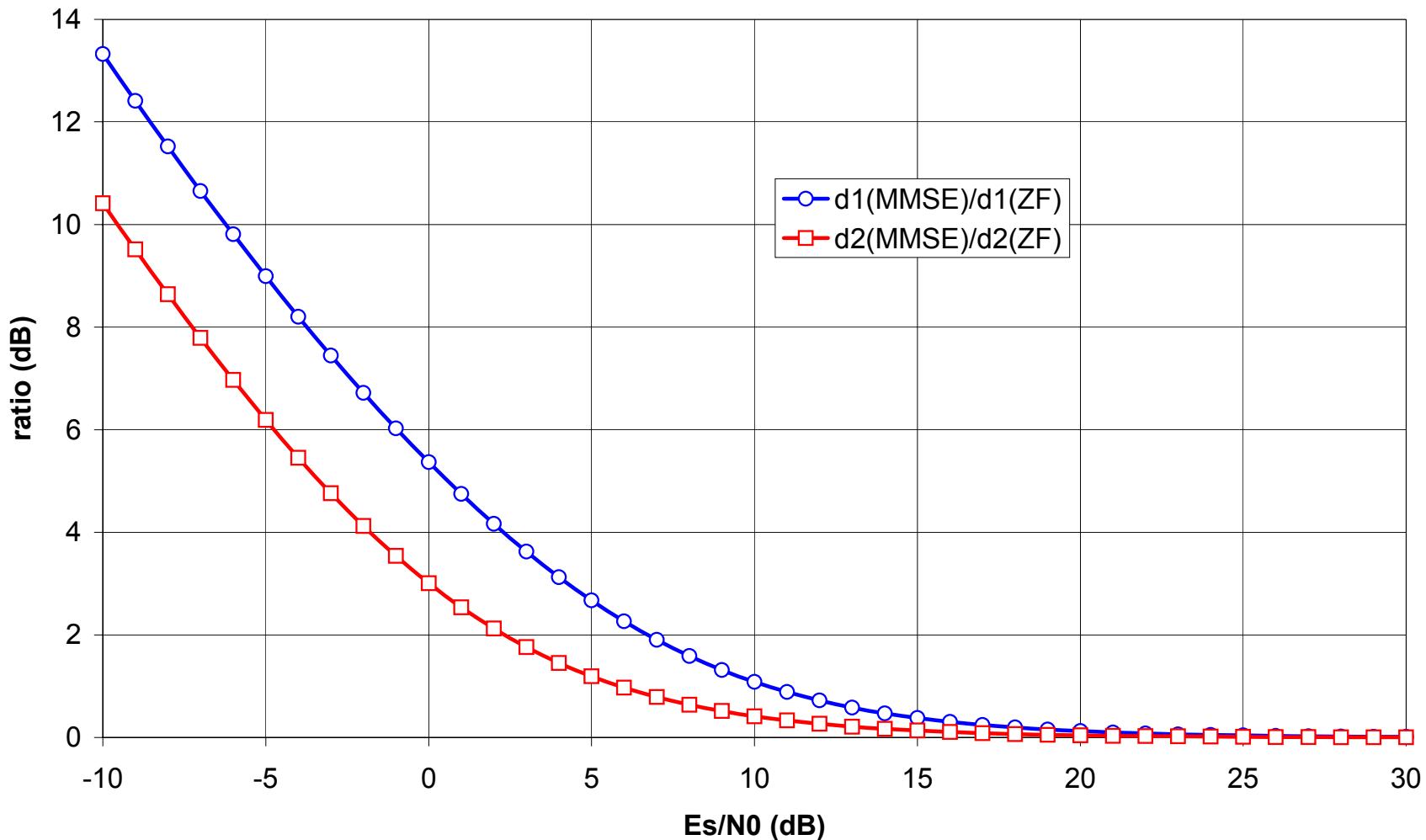
$$\text{MSE}_{1,\text{ZF,DFB}} = \frac{\mu}{1 - \gamma^2} \quad \text{MSE}_{2,\text{ZF,DFB}} = \mu$$

$$\text{MMSE+DFB :} \quad \mathbf{G} + \mu \mathbf{I}_N = \mathbf{F}_U' \mathbf{D}' \mathbf{F}_L' \quad d'_1 = \frac{(1 + \mu)^2 - \gamma^2}{1 + \mu} \quad d'_2 = 1 + \mu$$

$$\text{MSE}_{1,\text{min,DFB}} = \frac{\mu(1 + \mu)}{(1 + \mu)^2 - \gamma^2} \leq \frac{\mu}{1 - \gamma^2} \quad \text{MSE}_{2,\text{min,DFB}} = \frac{\mu}{1 + \mu} \leq \mu$$

# MMSE+DFB versus ZF+DFB

## Voorbeeld (2)



# BER van de verschillende ontvangers (1)

1. “Genie” benedengrens
2. ML detectie
  1. Bovengrens (PEP)
  2. Benedengrens (ad hoc)
3. ZF lineaire ontvanger (exacte BER)
4. MMSE lineaire ontvanger (residuele ISI als Gaussiaans beschouwd)
5. ZF+DFB ontvanger (geen error propagation)
6. MMSE+DFB ontvanger (geen error propagation,  
residuele ISI als Gaussiaans beschouwd)

# BER van de verschillende ontvangers (2)

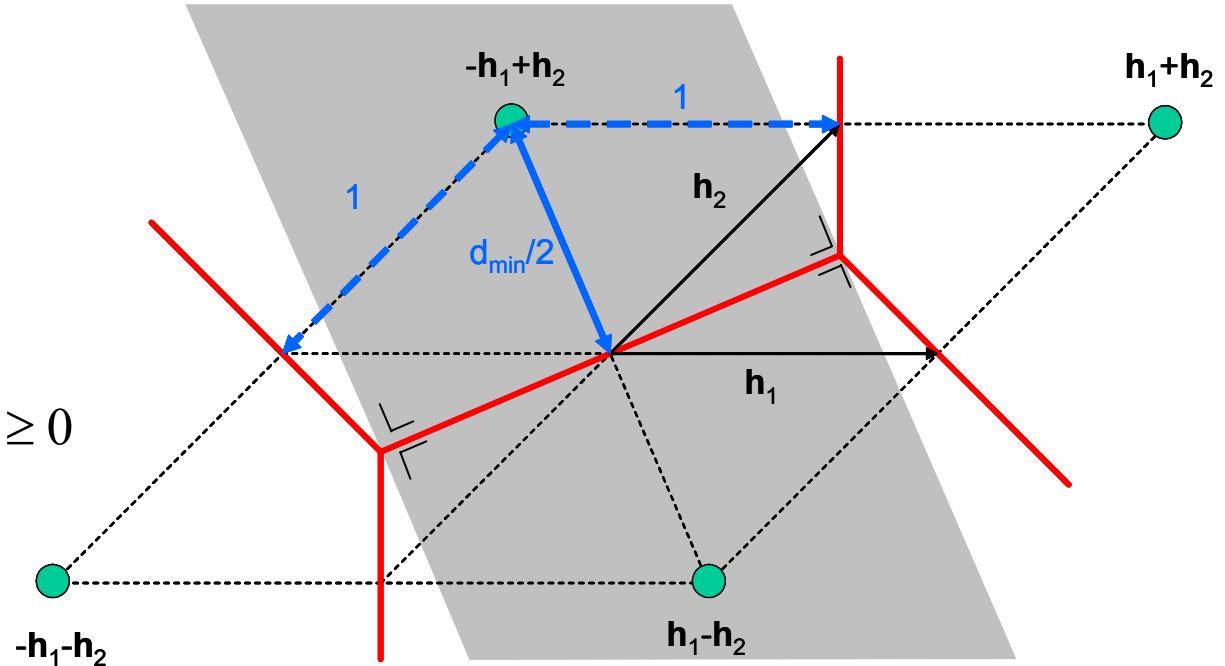
## Ad hoc benedengrens ML detectie

a) Benedengrens op

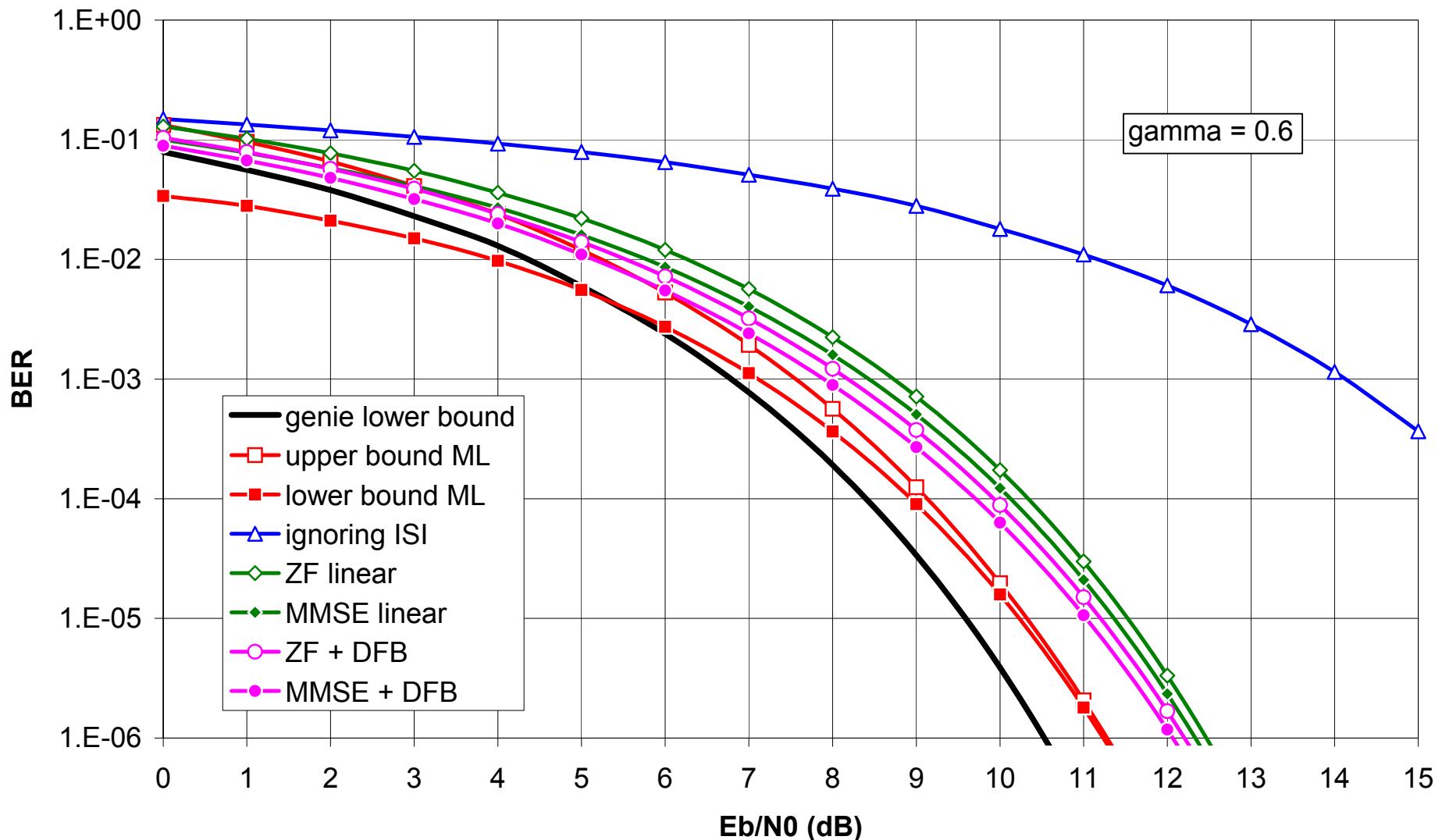
$$\text{BER} \Big|_{a_1=1, a_2=-1} = \text{BER} \Big|_{a_1=-1, a_2=1}$$

integratiegebied beperken tot gearceerde half-oneindige gebieden

b)  $\text{BER} \Big|_{a_1=a_2=1} = \text{BER} \Big|_{a_1=a_2=-1} \geq 0$



# BER van de verschillende ontvangers (3)



# Symbool-per symbool decisie

## Samenvatting

- Voor niet-diagonale  $\mathbf{G}$  is de ML detectie zeer rekenintensief
- De rekencomplexiteit kan gereduceerd worden door symbool-per symbool decisie te gebruiken.
- Symbool-per symbool decisie op de componenten van  $\mathbf{z}$  (voldoende statistiek) is onderhevig aan de ISI vervat in  $\mathbf{z}$
- ISI in  $\mathbf{z}$  reduceren via egalisatie, vervolgens symbool-per-symbool decisie
- Lineaire egalisatie :  $\mathbf{z}$  aanleggen aan lineair filter
- DFB egalisatie :  $\mathbf{z}$  aanleggen aan lineair filter, en lineaire combinatie van beschikbare symbooldecisies aftrekken van filteruitgang
- Reductie van ISI gaat ten koste van “noise enhancement”
- DFB egalisatie (indien geen foutpropagatie) beter dan lineaire egalisatie