

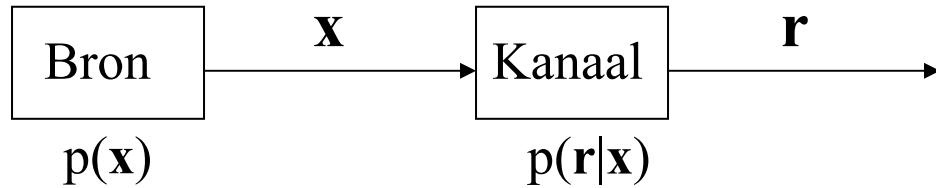
Modulatie en detectie

Hoofdstuk 2 :

Estimatie- en Decisietheorie

Definities

Bron, Kanaal en Schatting



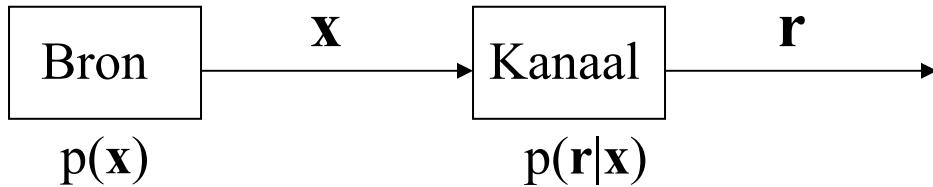
\mathbf{x} : parametervector

\mathbf{r} : observatievector

$p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$: distributie van \mathbf{r} bij gegeven \mathbf{x}

$p(\mathbf{x})$: a priori distributie van \mathbf{x}

Bron, Kanaal en Schatting



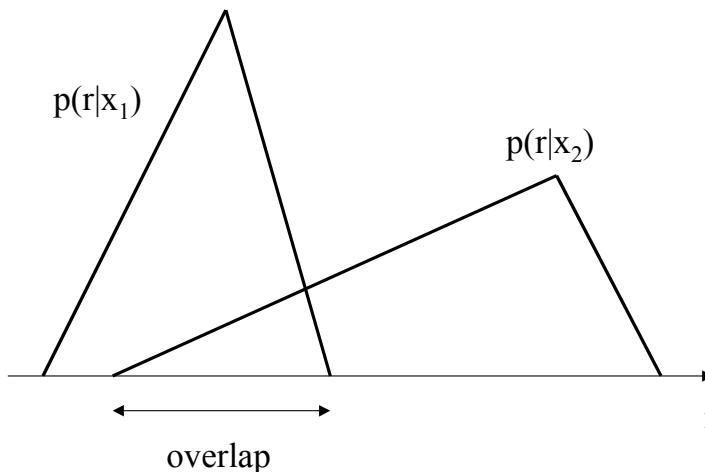
x : parametervector

r : observatievector

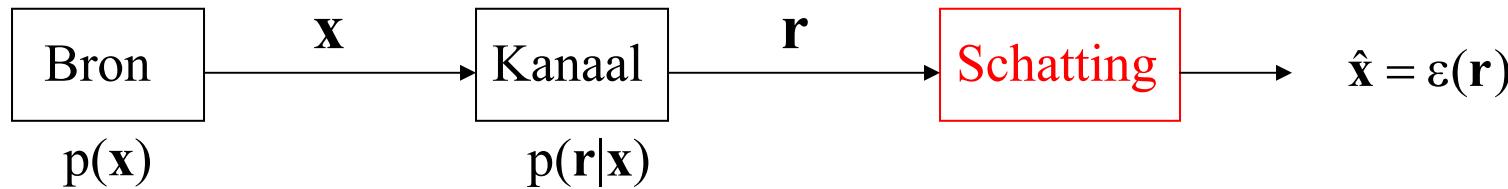
$p(r|x)$: distributie van r bij gegeven x

$p(x)$: a priori distributie van x

de exacte waarde van x kan meestal niet bepaald worden uit r



Bron, Kanaal en Schatting



x : parametervector

r : observatievector

$p(r|x)$: distributie van r bij gegeven x

$p(x)$: a priori distributie van x

de exacte waarde van x kan meestal niet bepaald worden uit r

we zoeken een *schatting* \hat{x}

\hat{x} is een deterministische functie van r

$$\hat{x} = \varepsilon(r)$$

Kostfunctie en Risico

Kostfunctie $C(\hat{x}, x)$ vergelijkt x en \hat{x}

$C(\hat{x}, x)$ wordt minimum voor $\hat{x} = x$

Risico = gemiddelde van de kostfunctie

$$R = E_{r,x}[C(\hat{x}, x)] = \iint C(\varepsilon(r), x) p(r, x) dr dx$$

$E_{r,x}[\cdot]$: verwachtingswaarde over r en x

$p(r, x)$: gezamenlijke distributie van r en x

De *optimale* schatting $\varepsilon(r)$ minimaliseert het risico R

Informatie (a priori, a posteriori) en kansfunctie

gezamenlijke distributie $p(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ is te schrijven als

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{r})p(\mathbf{r})$$

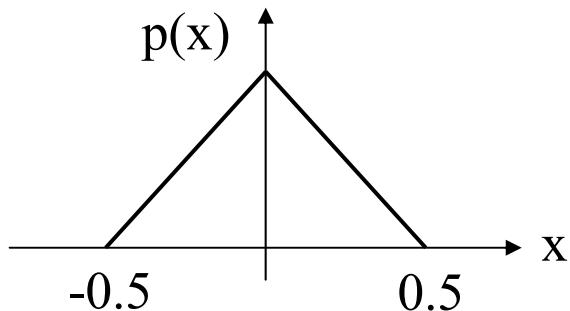
Informatie (a priori, a posteriori) en kansfunctie

gezamenlijke distributie $p(r,x)$ is te schrijven als

$$p(r,x) = p(r|x)p(x) = p(x|r)p(r)$$

- $p(x)$ is de *a priori* distributie van x , en vertegenwoordigt onze kennis van x wanneer we geen toegang hebben tot de observatie r

voorbeeld

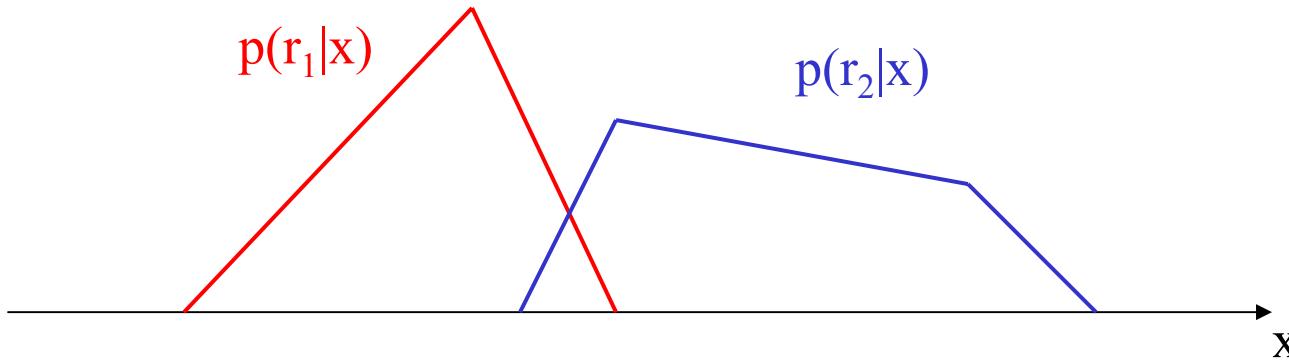


Informatie (a priori, a posteriori) en kansfunctie

gezamenlijke distributie $p(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ is te schrijven als

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{r})p(\mathbf{r})$$

- $p(\mathbf{x})$ is de *a priori* distributie van \mathbf{x} , en vertegenwoordigt onze kennis van \mathbf{x} wanneer we geen toegang hebben tot de observatie \mathbf{r}
- $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$, beschouwd als functie van \mathbf{x} , is de *kansfunctie (likelihood function)* van \mathbf{x} , en vertegenwoordigt onze kennis van \mathbf{x} verworven via de observatie \mathbf{r}



Informatie (a priori, a posteriori) en kansfunctie

gezamenlijke distributie $p(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ is te schrijven als

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{r})p(\mathbf{r})$$

- $p(\mathbf{x})$ is de *a priori* distributie van \mathbf{x} , en vertegenwoordigt onze kennis van \mathbf{x} wanneer we geen toegang hebben tot de observatie \mathbf{r}
- $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$, beschouwd als functie van \mathbf{x} , is de *kansfunctie (likelihood function)* van \mathbf{x} , en vertegenwoordigt onze kennis van \mathbf{x} verworven via de observatie \mathbf{r}
- $p(\mathbf{r})$ is de marginale distibutie van \mathbf{r} :

$$p(\mathbf{r}) = \int p(\mathbf{r}, \mathbf{x})d\mathbf{x} = \int p(\mathbf{r} | \mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$p(\mathbf{r})$ hangt niet af van \mathbf{x} , en levert dus geen informatie over \mathbf{x}

Informatie (a priori, a posteriori) en kansfunctie

gezamenlijke distributie $p(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ is te schrijven als

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{r})p(\mathbf{r})$$

- $p(\mathbf{x})$ is de *a priori* distributie van \mathbf{x} , en vertegenwoordigt onze kennis van \mathbf{x} wanneer we geen toegang hebben tot de observatie \mathbf{r}
- $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$, beschouwd als functie van \mathbf{x} , is de *kansfunctie (likelihood function)* van \mathbf{x} , en vertegenwoordigt onze kennis van \mathbf{x} verworven via de observatie \mathbf{r}
- $p(\mathbf{r})$ is de marginale distributie van \mathbf{r} :

$$p(\mathbf{r}) = \int p(\mathbf{r}, \mathbf{x})d\mathbf{x} = \int p(\mathbf{r} | \mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$p(\mathbf{r})$ hangt niet af van \mathbf{x} , en levert dus geen informatie over \mathbf{x}

- $p(\mathbf{x}|\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})/p(\mathbf{r})$ is de *a posteriori* distributie van \mathbf{x} ; $p(\mathbf{x}|\mathbf{r})$ vertegenwoordigt onze *totale* kennis van \mathbf{x} , door *a priori* kennis $p(\mathbf{x})$ en de kansfunctie $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$ te combineren ($p(\mathbf{r})$ is enkel een normalisatiefactor)

Voorbeeld 1 : HIV-test

kwaliteit HIV-test gekarakteriseerd door :

$$\Pr[\text{test positief} \mid \text{geen HIV}] \quad (\text{typisch } \ll 1)$$

$$\Pr[\text{test negatief} \mid \text{HIV}] \quad (\text{typisch } \ll 1)$$

Voorbeeld : $\Pr[\text{test positief} \mid \text{geen HIV}] = 0.05 \text{ (0.005)}$
 $\Pr[\text{test negatief} \mid \text{HIV}] = 0.01(0.001)$

Wat is de waarschijnlijkheid dat patiënt besmet (niet besmet) is door HIV, wanneer de test postief (negatief) is ?

Voorbeeld 1 : HIV-test

kwaliteit HIV-test gekarakteriseerd door :

$$\Pr[\text{test positief} \mid \text{geen HIV}] \quad (\text{typisch } \ll 1)$$

$$\Pr[\text{test negatief} \mid \text{HIV}] \quad (\text{typisch } \ll 1)$$

Voorbeeld : $\Pr[\text{test positief} \mid \text{geen HIV}] = 0.05 \text{ (0.005)}$
 $\Pr[\text{test negatief} \mid \text{HIV}] = 0.01 \text{ (0.001)}$

Wat is de waarschijnlijkheid dat patiënt besmet (niet besmet) is door HIV, wanneer de test postief (negatief) is ?

onbekende parameter $x \in \{\text{HIV, geen HIV}\}$

observatie $r \in \{\text{test positief, test negatief}\}$

kansfunctie $\Pr[r|x]$

a posteriori waarschijnlijkheid $\Pr[x|r]$?

Voorbeeld 1 : HIV-test

Berekening a posteriori informatie :

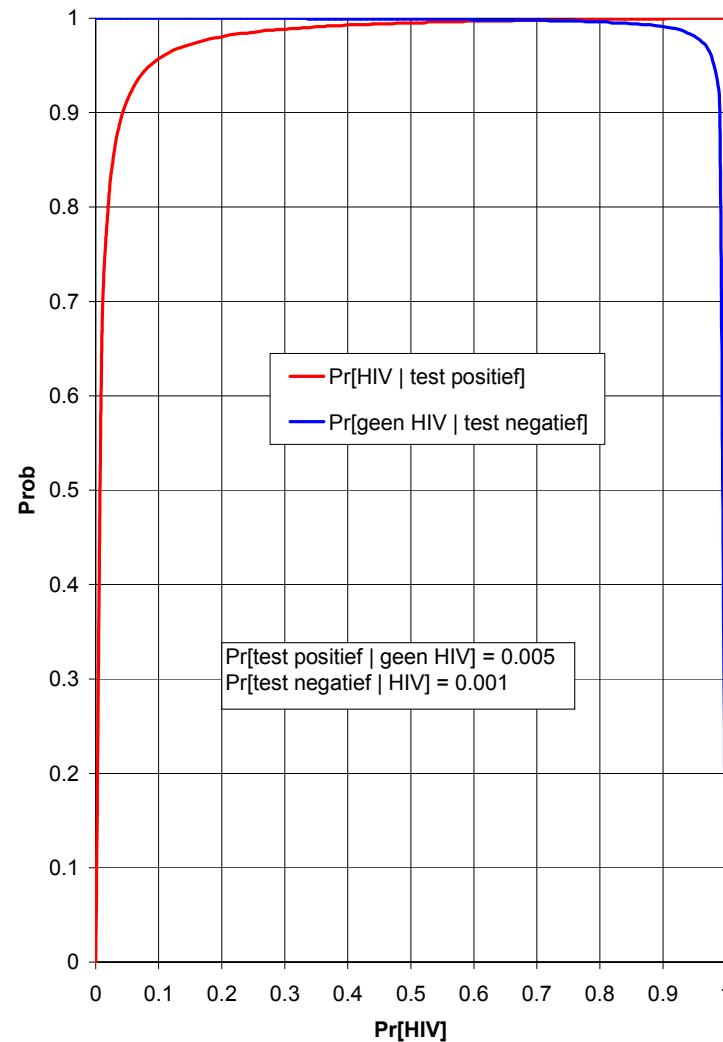
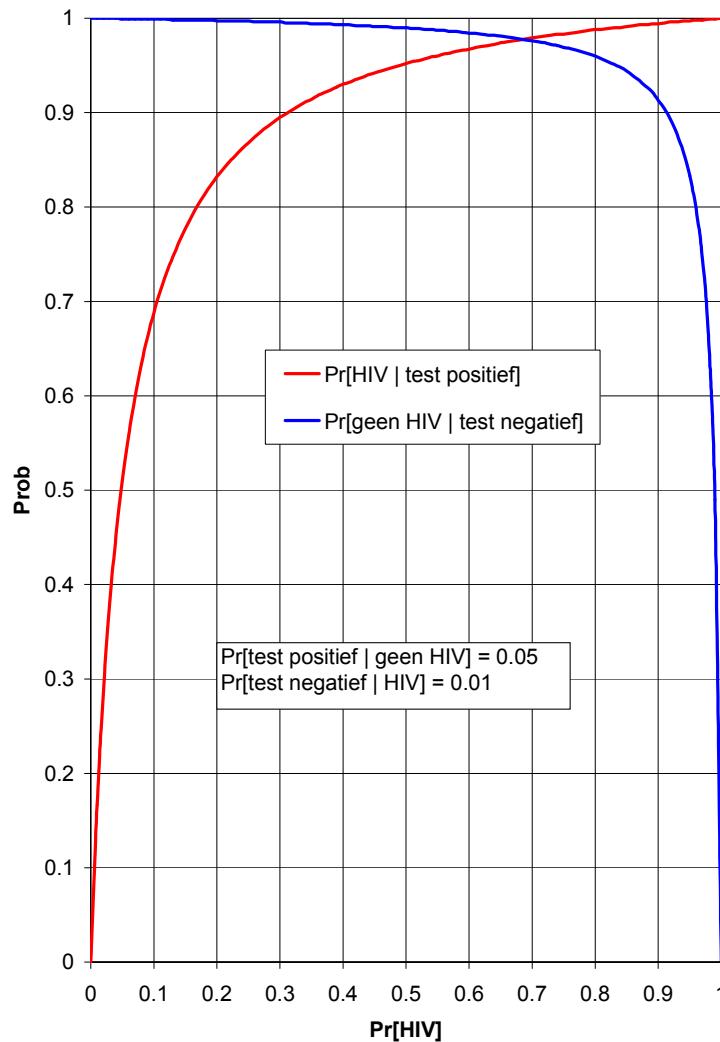
$$\Pr[\text{HIV} \mid \text{test positief}] = \frac{\Pr[\text{test positief} \mid \text{HIV}] \Pr[\text{HIV}]}{\Pr[\text{test positief}]}$$

$$\Pr[\text{geen HIV} \mid \text{test negatief}] = \frac{\Pr[\text{test negatief} \mid \text{geen HIV}] \Pr[\text{geen HIV}]}{\Pr[\text{test negatief}]}$$

$$\begin{aligned}\Pr[\text{test positief}] &= \Pr[\text{test positief} \mid \text{HIV}] \Pr[\text{HIV}] \\ &\quad + \Pr[\text{test positief} \mid \text{geen HIV}] \Pr[\text{geen HIV}]\end{aligned}$$

a priori informatie over patiënt : $\Pr[\text{HIV}]$, $\Pr[\text{geen HIV}] = 1 - \Pr[\text{HIV}]$
bepaald door “gedrag” patiënt

Voorbeeld 1 : HIV-test

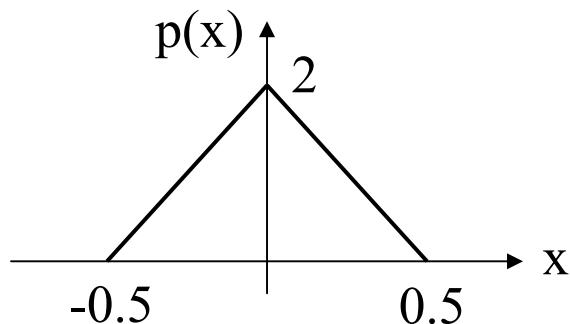


Voorbeeld 2

$$r = x + w$$

$$w \sim N(0, \sigma^2)$$

$p(r|x)$ is Gaussiaanse distributie met gemiddelde x en variantie σ^2



a priori : x tussen -0.5 en 0.5,
hoogste waarschijnlijkheid bij $x = 0$

kansfunctie :
$$p(r|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(r-x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

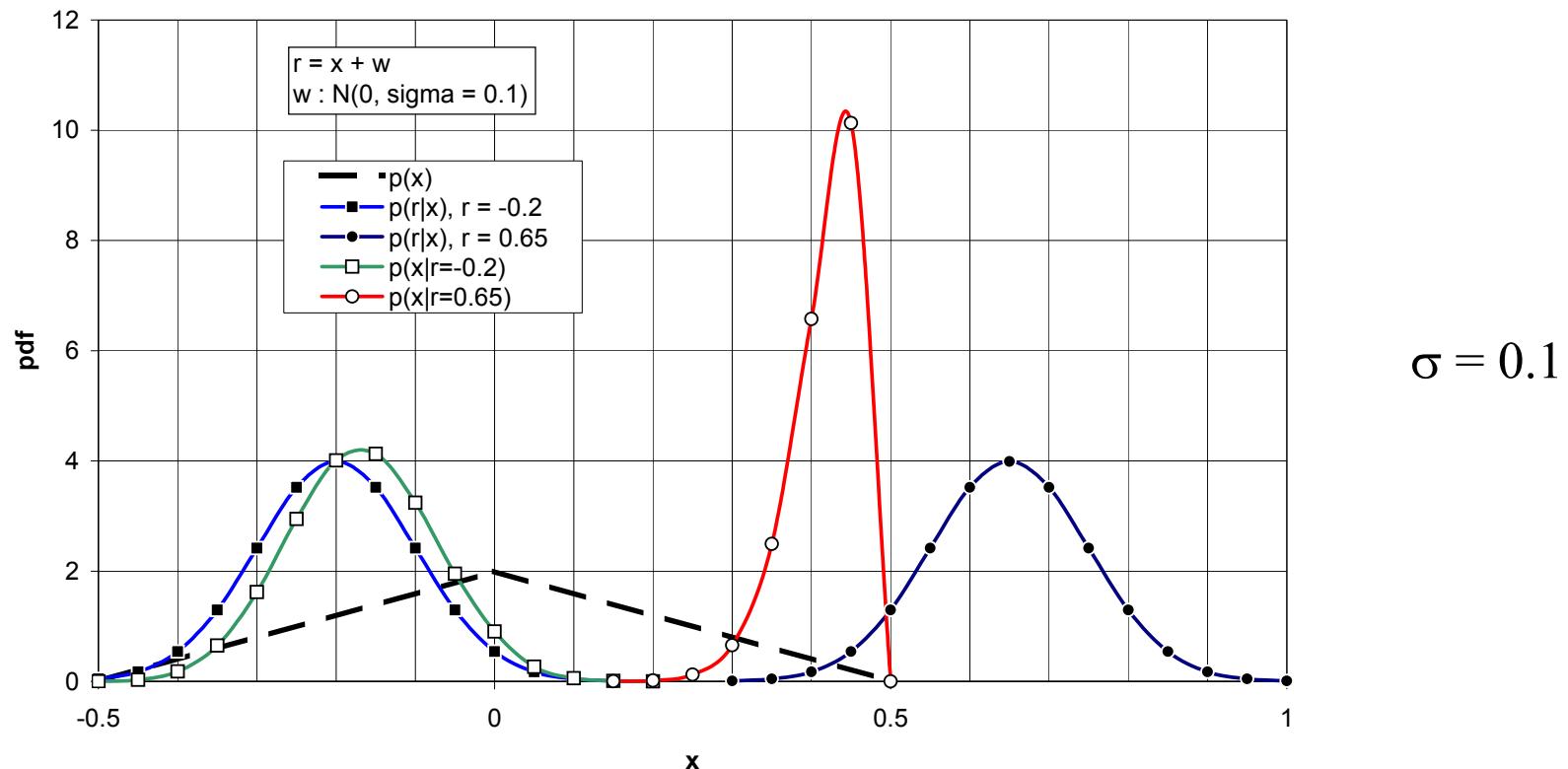
$x = r$ is de meest aannemelijke (*most likely*) waarde voor x
(bij gegeven r wordt $p(r|x)$ maximaal voor $x = r$)

Voorbeeld 2

σ klein, $r = -0.2 \Rightarrow$ a posteriori \approx kansfunctie

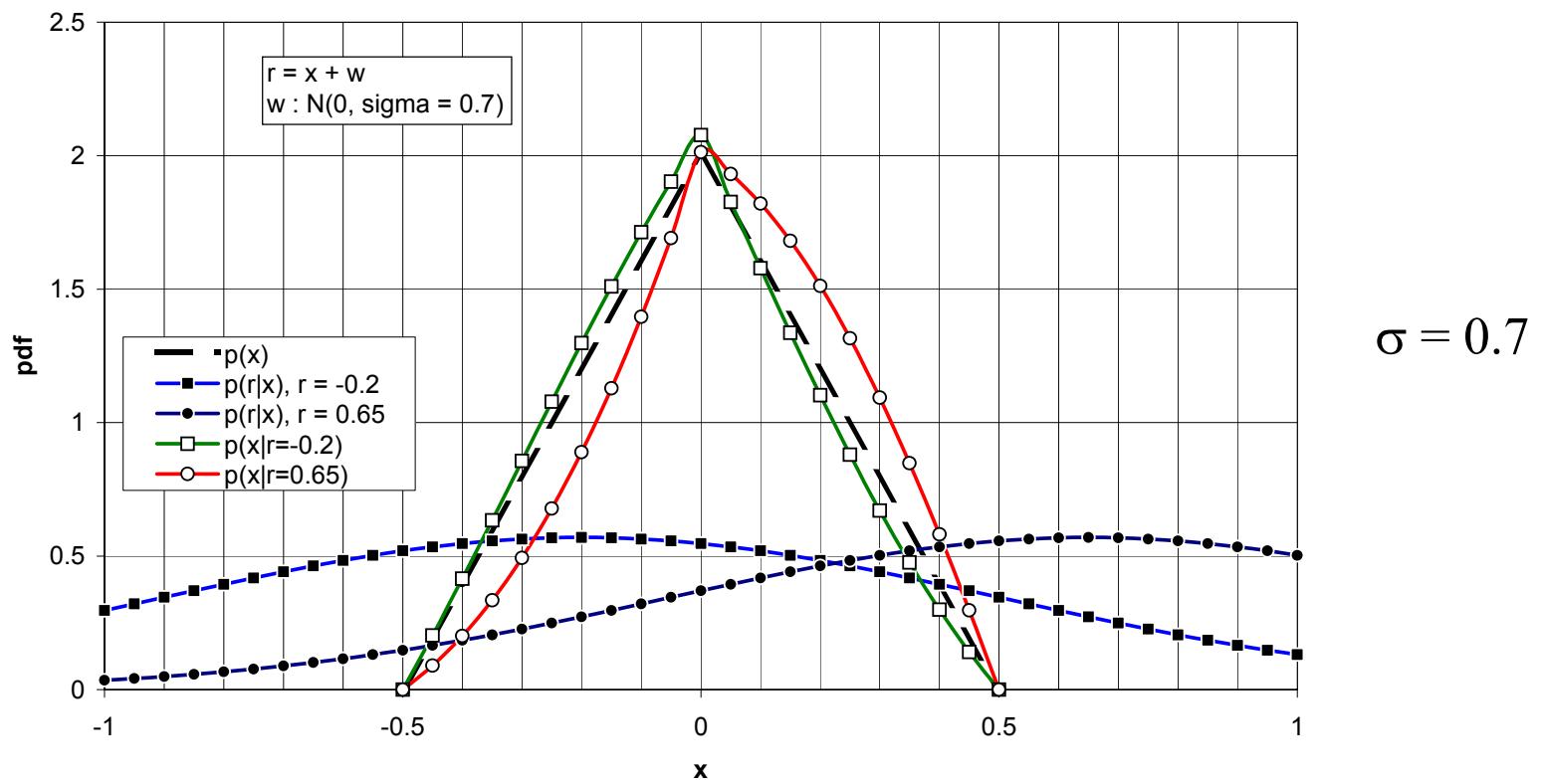
waarneming betrouwbaar indien $r \in (-0.5, 0.5)$

σ klein, $r = 0.65 \Rightarrow$ a posteriori verschilt sterk van kansfunctie en a priori



Voorbeeld 2

σ groot \Rightarrow a posteriori \approx a priori, ongeacht waarneming r
a priori informatie betrouwbaarder dan waarneming



Detectie en estimatie

Detectie

Detectie : schatten van een *discrete* parameter (hypothesetest).
Schatting wordt “decisie” genoemd.

Beschouw kostfunctie $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \\ 1 & \hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x} \end{cases}$

Risico :

$$R = E[C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})] = \Pr[\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}] = P_e \quad \text{foutprobabiliteit}$$

MAP detector minimaliseert P_e

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \Pr[\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}] = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \ln \Pr[\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}]$$

Detectie

MAP detector kan omgevormd worden tot

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \Pr[\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}] p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} (\ln \Pr[\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}] + \ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}))$$

Indien \mathbf{x} uniform over X : MAP detector wordt ML detector

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}})$$

ML detector kan ook gebruikt worden wanneer
a priori distributie onbekend is of genegeerd wordt

Estimatie

Estimatie : schatten van een *continue* parameter.

Beschouw kostfunctie $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = |\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2$

Risico : $R = E[C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})] = E[|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2] = \text{MSE}$

Estimatie

Estimatie : schatten van een *continue* parameter.

Beschouw kostfunctie $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = |\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2$

Risico : $R = E[C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})] = E[|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2] = \text{MSE}$

Minimaliseren van MSE is vaak vrij bewerkelijk. Alternatief : *MAP schatting* :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \ln p(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}) \\ &= \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\tilde{\mathbf{x}}) p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} (\ln p(\tilde{\mathbf{x}}) + \ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}))\end{aligned}$$

Estimatie

Estimatie : schatten van een *continue* parameter.

Beschouw kostfunctie $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = |\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2$

Risico : $R = E[C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})] = E[|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^2] = \text{MSE}$

Minimaliseren van MSE is vaak vrij bewerkelijk. Alternatief : *MAP schatting* :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} \ln p(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{r}) \\ &= \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\tilde{\mathbf{x}}) p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} (\ln p(\tilde{\mathbf{x}}) + \ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}))\end{aligned}$$

Indien $p(x)$ uniform over X : MAP schatting wordt ML schatting

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}) = \arg \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in X} (\ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{x}}))$$

ML schatting kan ook gebruikt worden wanneer a priori distributie onbekend of genegeerd, of \mathbf{x} is onbekende deterministische parameter

Voorbeeld 1 : estimatie

$$r = x + w \quad x : \text{scalaire parameter} \quad w \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\text{log. kansfunctie : } \ln p(r | x) = -\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{(r-x)^2}{2\sigma^2} \propto \frac{-(r-x)^2}{2\sigma^2} \quad \text{figuur}$$

a priori : $p(x)$ uniform over (-0.5, 0.5)

MAP (of ML) schatting :

$$\hat{x} = \begin{cases} r & r \in (-1/2, 1/2) \\ -1/2 & r < -1/2 \\ 1/2 & r > 1/2 \end{cases}$$

Voorbeeld 2 : detectie

$$r = x + w \quad x : \text{scalaire parameter} \quad w \sim N(0, \sigma^2)$$

log. kansfunctie :

$$\ln p(r | x) = \frac{-(r - x)^2}{2\sigma^2}$$

figuur

a priori :

$$\Pr[x=1] = \Pr[x=-1] = 0.5$$

MAP (of ML) detectie :

$$\begin{array}{c} \hat{x}=1 \\ \ln p(r | x=1) > \ln p(r | x=-1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \hat{x}=1 \\ r > 0 \end{array} \Rightarrow \hat{x} = \text{sgn}(r)$$
$$\begin{array}{c} \hat{x}=-1 \\ \ln p(r | x=1) < \ln p(r | x=-1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \hat{x}=-1 \\ r < 0 \end{array}$$

Voorbeeld 3 : transmissie over BSC

encoder : $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c} = \chi(\mathbf{b})$

\mathbf{b} : k informatiebits \mathbf{c} : n gecodeerde bits

alle sequenties \mathbf{b} even waarschijnlijk

BSC : foutprobabiliteit p ($p < 1/2 \Rightarrow (1-p)/p > 1$)

\mathbf{r} : ontvangen n-bit woord

Voorbeeld 3 : transmissie over BSC

encoder : $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c} = \chi(\mathbf{b})$

\mathbf{b} : k informatiebits \mathbf{c} : n gecodeerde bits

alle sequenties \mathbf{b} even waarschijnlijk

BSC : foutprobabiliteit p ($p < 1/2 \Rightarrow (1-p)/p > 1$)

\mathbf{r} : ontvangen n-bit woord

kansfunctie : $\Pr[\mathbf{r} = \mathbf{a} | \mathbf{c}] = \prod_{i=1}^n \Pr[r_i = a_i | c_i]$

$$\Pr[r_i = a_i | c_i] = \begin{cases} 1-p & a_i = c_i \\ p & a_i \neq c_i \end{cases}$$

Voorbeeld 3 : transmissie over BSC

Kansfunctie :

$$\Pr[r = \mathbf{a} | \tilde{\mathbf{b}}] = \Pr[r = \mathbf{a} | \mathbf{c} = \chi(\tilde{\mathbf{b}})] = (1-p)^{n-d} p^d = (1-p)^n \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-d}$$

$d = d_H(r, \chi(\tilde{\mathbf{b}}))$: Hamming afstand

kansfunctie is dalende functie van d

MAP (of ML) detectie :

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{b}}} d_H(r, \chi(\tilde{\mathbf{b}}))$$

minimalisatie van Hamming afstand tussen
ontvangen woord en mogelijk codewoord

repetiecode :
 $0 \rightarrow 000$
 $1 \rightarrow 111$
 $\mathbf{r} : 110$

Voldoende statistiek - Omkeerbare transformatie

Voldoende statistiek

In veel gevallen : $\ln(p(\mathbf{r}|\mathbf{x})) = g(\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{x}) + f(\mathbf{r})$

Voldoende statistiek

In veel gevallen : $\ln(p(\mathbf{r}|\mathbf{x})) = g(\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{x}) + f(\mathbf{r}) \propto g(\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{x})$

hangt niet af van \mathbf{x}

$\Rightarrow \mathbf{z} = \varphi(\mathbf{r})$ is “voldoende statistiek” (*sufficient statistic*)

\mathbf{r} en $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{r})$ bevatten dezelfde informatie over \mathbf{x} .

Voldoende statistiek

In veel gevallen : $\ln(p(\mathbf{r}|\mathbf{x})) = g(\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{x}) + f(\mathbf{r}) \propto g(\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{x})$

hangt niet af van \mathbf{x}

$\Rightarrow \mathbf{z} = \varphi(\mathbf{r})$ is “voldoende statistiek” (*sufficient statistic*)

\mathbf{r} en $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{r})$ bevatten dezelfde informatie over \mathbf{x} .

De transformatie $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{z} = \varphi(\mathbf{r})$ is vaak NIET omkeerbaar : er gaat dus informatie verloren bij de transformatie, maar de verloren informatie is NIET relevant voor het schatten van \mathbf{x} .

Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$: $T(\cdot)$ is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$ bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek \mathbf{z}

$\Rightarrow \mathbf{u}$ is ook voldoende statistiek

Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$: $T(\cdot)$ is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$ bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek \mathbf{z}

$\Rightarrow \mathbf{u}$ is ook voldoende statistiek

Zoek de beste schatting in overeenstemming met kostfunctie $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$

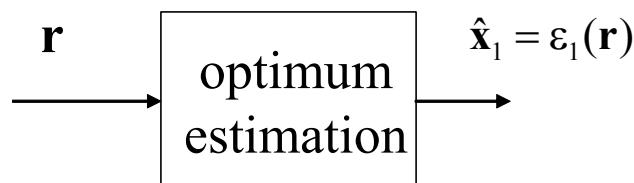
Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$: $T(\cdot)$ is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$ bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek \mathbf{z}

$\Rightarrow \mathbf{u}$ is ook voldoende statistiek

Zoek de beste schatting in overeenstemming met kostfunctie $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$



$$\min E_{\mathbf{r}, \mathbf{x}} [C(\varepsilon_1(\mathbf{r}), \mathbf{x})]$$

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{x}), p(\mathbf{x})$$

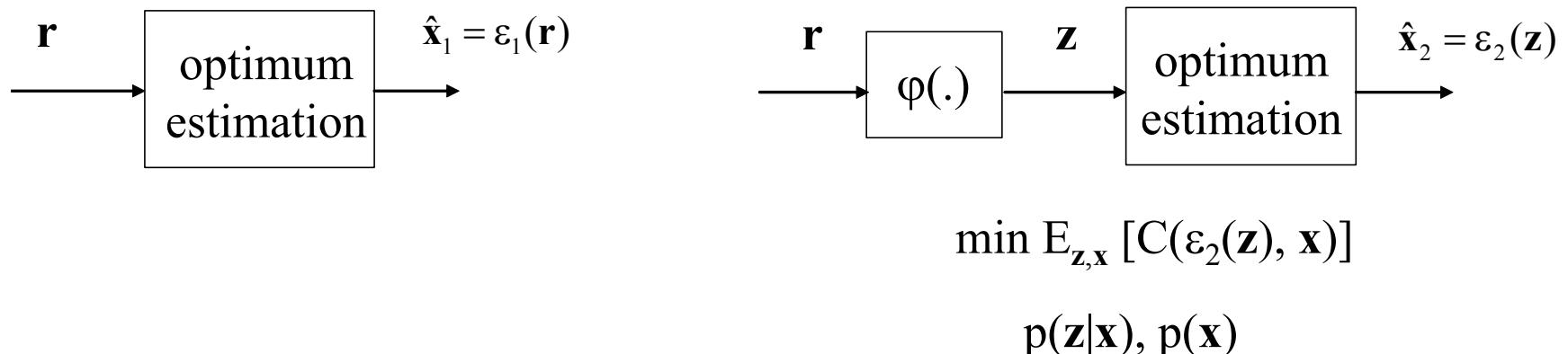
Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$: $T(\cdot)$ is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$ bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek \mathbf{z}

$\Rightarrow \mathbf{u}$ is ook voldoende statistiek

Zoek de beste schatting in overeenstemming met kostfunctie $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$



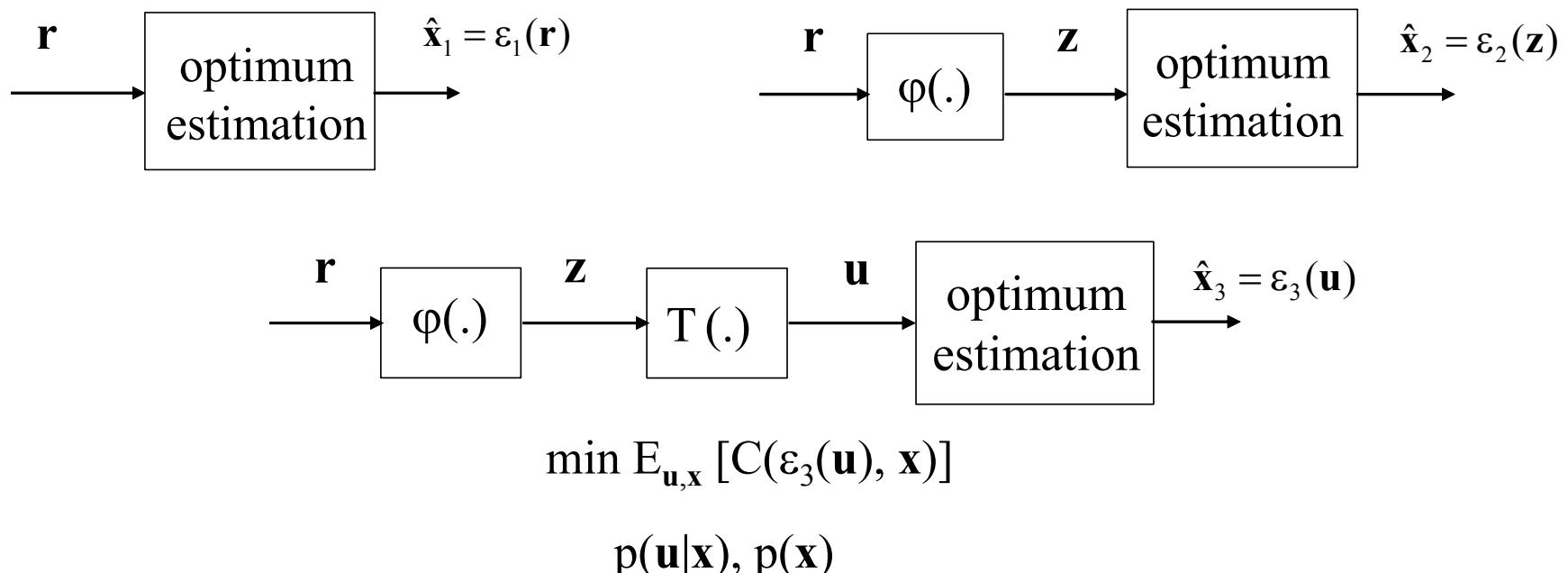
Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$: $T(\cdot)$ is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$ bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek \mathbf{z}

$\Rightarrow \mathbf{u}$ is ook voldoende statistiek

Zoek de beste schatting in overeenstemming met kostfunctie $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$



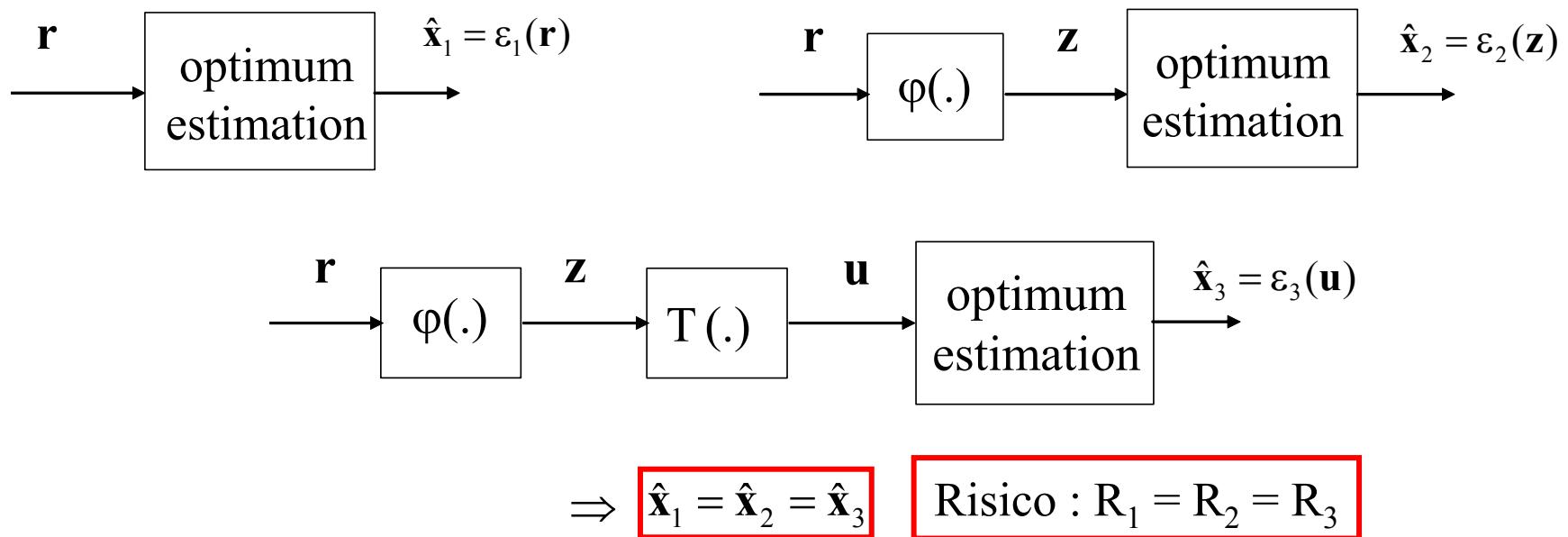
Omkeerbare transformatie

$\mathbf{u} = T(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} = T^{-1}(\mathbf{u})$: $T(\cdot)$ is omkeerbare transformatie

$\Rightarrow \mathbf{u}$ bevat dezelfde informatie als de voldoende statistiek \mathbf{z}

$\Rightarrow \mathbf{u}$ is ook voldoende statistiek

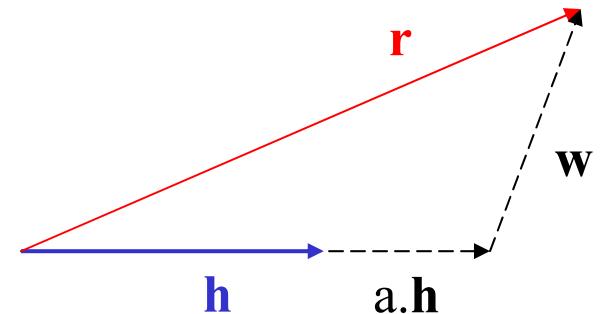
Zoek de beste schatting in overeenstemming met kostfunctie $C(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$



Voorbeeld : detectie

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{w}, \mathbf{w} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_K)$$

$\mathbf{a} \in$ constellatie C (M punten)



$$\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{a}) = -K \cdot \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}|^2}{2\sigma^2} \propto \frac{-1}{2\sigma^2} (\lambda \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{h}^T \mathbf{r})) \quad |\mathbf{h}|^2 = \lambda$$

voldoende statistiek : $z = \mathbf{h}^T \mathbf{r} \sim N(\lambda \mathbf{a}, \sigma^2 \lambda)$: *scalair*

$$\ln p(z | \mathbf{a}) \propto \frac{-1}{2\sigma^2 \lambda} |z - \lambda \mathbf{a}|^2 \propto \frac{-1}{2\sigma^2} (\lambda \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot z)$$

omkeerbare transformatie : $u = z/\lambda \sim N(a, \sigma^2/\lambda)$

$$\ln p(u | \mathbf{a}) \propto \frac{-\lambda}{2\sigma^2} |u - a|^2 \propto \frac{-\lambda}{2\sigma^2} (a^2 - 2a \cdot u)$$

Voorbeeld : detectie

maximalisatie van $\ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{a}})$ of $\ln p(z | \tilde{\mathbf{a}})$ of $\ln p(u | \tilde{\mathbf{a}})$

leidt tot dezelfde decisie

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}} &= \max_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} \frac{-1}{2\sigma^2} |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{h}|^2 = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{h}|^2 \\ &= \max_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} \frac{-1}{2\sigma^2 \lambda} |z - \lambda \tilde{\mathbf{a}}|^2 = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} |z - \lambda \tilde{\mathbf{a}}|^2 \\ &= \max_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} \frac{-\lambda}{2\sigma^2} |u - \tilde{\mathbf{a}}|^2 = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C} |u - \tilde{\mathbf{a}}|^2\end{aligned}$$

u afronden naar
dichtstbijgelegen
constellatiepunt

Gaussiaanse observatievector

Gaussiaanse observatievector

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) + \mathbf{w} \quad \mathbf{w} \sim N_{\textcolor{red}{c}}(0, N_0 \mathbf{I}_K) \quad K : \text{dimensie van } \mathbf{r}, \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{w}$$

$$\text{logaritmische kansfunctie :} \quad N_0 = 2\sigma_0^2$$

$$\begin{aligned}\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) &= -K \ln(2\pi\sigma_0^2) - \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_k |\mathbf{r}_k - \mathbf{s}_k(\mathbf{x})|^2 \\ &\propto -\frac{1}{2\sigma_0^2} |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{x})|^2 \\ &\propto -\frac{1}{2\sigma_0^2} \left(|\mathbf{r}|^2 - 2 \operatorname{Re}[\mathbf{s}^H(\mathbf{x}) \mathbf{r}] + |\mathbf{s}(\mathbf{x})|^2 \right) \\ &\propto \frac{1}{2\sigma_0^2} \left(2 \operatorname{Re}[\mathbf{s}^H(\mathbf{x}) \mathbf{r}] - |\mathbf{s}(\mathbf{x})|^2 \right)\end{aligned}$$

Voorbeeld

“zachte” decodering over AWGN kanaal

encoder + mapper : $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{a} = \chi(\mathbf{b})$

\mathbf{b} : k informatiebits \mathbf{c} : n gecodeerde bits

\mathbf{a} : K datasymbolen, behorend tot constellatie met $M = 2^m$ punten ($K = n/m$)

alle sequenties \mathbf{b} even waarschijnlijk

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{w} \quad \mathbf{w} \sim N_c(0, \sigma_0^2 \mathbf{I}_K)$$

MAP (of ML) detector :

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{b}}} |\mathbf{r} - \chi(\tilde{\mathbf{b}})|^2$$

minimalisatie van Euclidische afstand
tussen ontvangen woord en toelaatbare
symboolsequentie

repetitiecode :

$$0 \rightarrow 000 \rightarrow -4, -4, -4$$

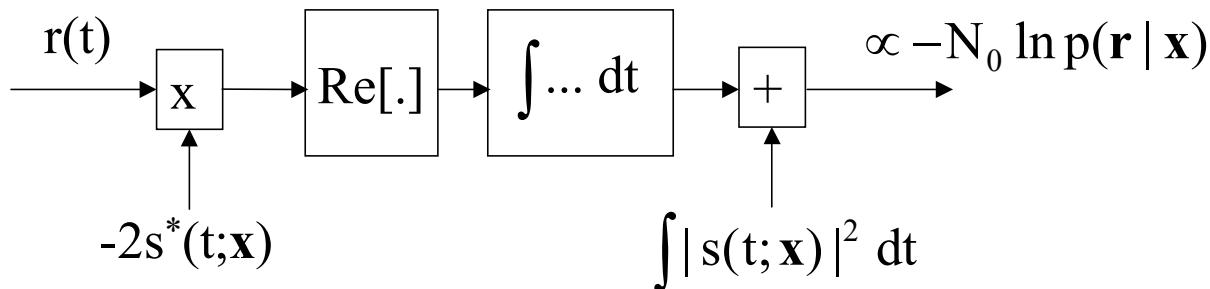
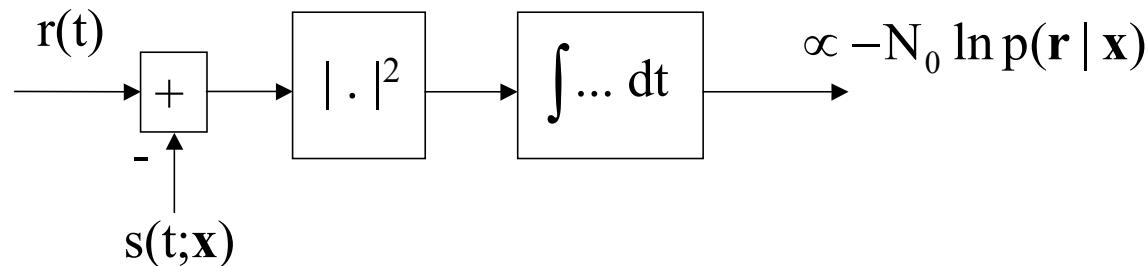
$$1 \rightarrow 111 \rightarrow 4, 4, 4$$

$$\mathbf{r} : 1, 1, -4$$

Continue-tijd Gaussiaanse observaties

$$r(t) = s(t; \mathbf{x}) + w(t) \quad w(t) \sim N_c(0, N_0 \delta(u))$$

$$\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \propto -\frac{1}{N_0} \int |r(t) - s(t; \mathbf{x})|^2 dt \propto \frac{1}{N_0} \int (2 \operatorname{Re}[r(t)s^*(t; \mathbf{x})] - |s(t; \mathbf{x})|^2) dt$$



Continue-tijd Gaussiaanse observaties

Meerdere observaties (voorbeeld : meerdere antennes aan ontvanger)

$$r_n(t) = s_n(t; \mathbf{x}) + w_n(t) \quad w_n(t) \sim N_c(0, N_{0,n} \delta(u)) \quad (n = 0, \dots, N-1)$$

ruistermen $w_{n1}(t)$ en $w_{n2}(t)$ statistisch onafhankelijk

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) &\propto \sum_{n=0}^{N-1} \frac{-1}{N_{0,n}} \int |r_n(t) - s_n(t; \mathbf{x})|^2 dt \\ &\propto \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N_{0,n}} \int (2 \operatorname{Re}[r_n(t)s_n^*(t; \mathbf{x})] - |s_n(t; \mathbf{x})|^2) dt \end{aligned}$$

Cramer-Rao grens

$\mathbf{r} \sim N_c(\mathbf{s}(\mathbf{x}), 2\sigma^2 \mathbf{I}_N)$, \mathbf{x} reële continue vectorparameter

$$E_{\mathbf{r}, \mathbf{x}}[(\hat{\mathbf{x}}_m - \mathbf{x}_m)^2] \geq (\mathbf{J}_T^{-1})_{m,m} \quad \text{benchmark voor MSE}$$

$$\mathbf{J}_T = \mathbf{J}_P + E_{\mathbf{x}}[\mathbf{J}] \quad \mathbf{J} : \text{Fisher information matrix (FIM)}$$

$$(\mathbf{J}_P)_{m,n} = E_{\mathbf{x}} \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_m} \cdot \frac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_n} \right] = -E_{\mathbf{x}} \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_m \partial \mathbf{x}_n} \right] \quad (\text{bijdrage a priori informatie})$$

$$\text{FIM : } (\mathbf{J})_{m,n} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\text{Re} \left[\frac{\partial \mathbf{s}^H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_m} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_n} \right] \right) \quad (\text{bijdrage observatie})$$

MAP schatting :

$$E_{\mathbf{r}, \mathbf{x}}[(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) - \mathbf{x})^T] \rightarrow \mathbf{J}_T^{-1} \quad \text{wanneer } N \rightarrow \infty \text{ of } \sigma^2 \rightarrow 0$$

Cramer-Rao grens : opmerkingen

Continue observatie $r(t) = s(t; \mathbf{x}) + w(t)$, $w(t) \sim N_c(0, N_0\delta(u))$

Formules blijven gelden, met

$$(J)_{m,n} = \frac{2}{N_0} \operatorname{Re} \left[\int \frac{\partial s^*(t; \mathbf{x})}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial s(t; \mathbf{x})}{\partial x_n} dt \right]$$

CRB voor complexe parameter

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + j\mathbf{x}_I : \text{CRB toepassen op } \mathbf{x}' = (\mathbf{x}_R^T, \mathbf{x}_I^T)^T$$

Cramer-Rao grens : voorbeeld

$$r = x + w, \text{ with } \quad x \sim N(0, \sigma_x^2) \quad w \sim N(0, \sigma_w^2)$$

MAP schatting

$$\hat{x} = r \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_w^2} \quad E_{r,x}[(\hat{x} - x)^2] \geq \frac{\sigma_w^2 \sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_w^2} \quad (\text{geldt hier met gelijkheid !})$$

ML schatting (maakt geen gebruik van a priori informatie)

$$\hat{x} = r \quad E_{r,x}[(\hat{x} - x)^2] \geq \sigma_w^2 \quad (\text{geldt hier met gelijkheid !})$$

$$\text{CRB}_{\text{ML}} > \text{CRB}_{\text{MAP}}$$

ML detectie bij Gaussiaanse observatie : BER performantie

Exacte BER-uitdrukking (1)

Observatie : $\mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{a}) + \mathbf{w}$ $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}_c(0, N_0 \mathbf{I}_K)$ $\mathbf{a} \in C^N$ $N_0 = 2\sigma_0^2$

ML detectie : $\hat{\mathbf{a}} = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tilde{\mathbf{a}})|^2$

Verstuurd : $\mathbf{a} = \mathbf{a}_i \in C^N$ Gedetecteerd : $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_j \in C^N$ #bitfouten : $N_b(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_i)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_i)_n \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_i)_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_j)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_j)_n \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_j)_N \end{pmatrix}$$

n _b ((a _i) ₁ , (a _j) ₁)	
n _b ((a _i) _n , (a _j) _n)	
n _b ((a _i) _N , (a _j) _N)	

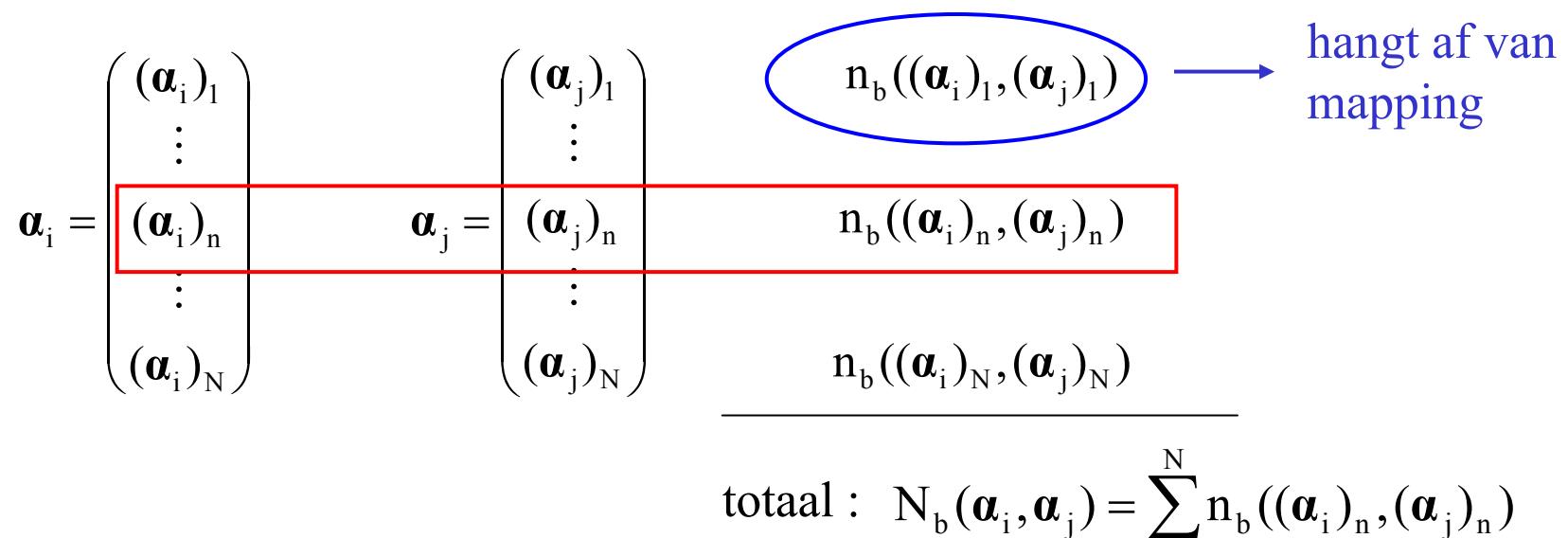
totaal : $N_b(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \sum_{n=1}^N n_b((\mathbf{a}_i)_n, (\mathbf{a}_j)_n)$

Exakte BER-uitdrukking (1)

$$\text{Observatie : } \mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{a}) + \mathbf{w} \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}_c(0, \mathbf{N}_0 \mathbf{I}_K) \quad \mathbf{a} \in \mathbb{C}^N \quad \mathbf{N}_0 = 2\sigma_0^2$$

$$\text{ML detectie : } \hat{\mathbf{a}} = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} | \mathbf{r} - \mathbf{s}(\tilde{\mathbf{a}}) |^2$$

$$\text{Verstuurd : } \mathbf{a} = \mathbf{a}_i \in C^N \quad \text{Gedetecteerd : } \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_j \in C^N \quad \# \text{bitfouten : } N_b(\mathbf{a}_i, \hat{\mathbf{a}}_j)$$



Exacte BER-uitdrukking (2)

Conditionele BER m.b.t. symboolvector (voor $\mathbf{a} = \alpha_i$) :

$$\text{BER}(\alpha_i) = \frac{E[N_b(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) | \mathbf{a} = \alpha_i]}{N \cdot \log_2(M)} = \frac{1}{N \cdot \log_2(M)} \sum_{j=1}^{M^N} N_b(\alpha_i, \alpha_j) \Pr[\hat{\mathbf{a}} = \alpha_j | \mathbf{a} = \alpha_i]$$

Gemiddelde BER m.b.t. symboolvector :

$$\text{BER} = \frac{E[N_b(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}})]}{N \cdot \log_2(M)} = \sum_{i=1}^{M^N} \text{BER}(\alpha_i) \Pr[\mathbf{a} = \alpha_i]$$

Bij ongedecodeerde transmissie geldt : $\Pr[\mathbf{a} = \alpha_i] = M^{-N}$

Exacte BER-uitdrukking (3)

$$N_b(a_i, a_j) = \sum_{n=1}^N n_b((a_i)_n, (a_j)_n) \Rightarrow \text{equivalente uitdrukking voor BER}$$

Conditionele BER m.b.t. n-de symbool (voor $a_n = \alpha_m$)

$$\text{BER}_n(\alpha_m) = \frac{E[n_b(a_n, \hat{a}_n) | a_n = \alpha_m]}{\log_2(M)} = \frac{1}{\log_2(M)} \sum_{m'=1}^M n_b(\alpha_m, \alpha_{m'}) \Pr[\hat{a}_n = \alpha_{m'} | a_n = \alpha_m]$$

Gemiddelde BER m.b.t. n-de symbool

$$\text{BER}_n = \frac{E[n_b(a_n, \hat{a}_n)]}{\log_2(M)} = \frac{1}{\log_2(M)} \sum_{m=1}^M \text{BER}_n(\alpha_m) \Pr[a_n = \alpha_m]$$

Gemiddelde BER m.b.t. symboolvector : $\text{BER} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{BER}_n$

Bovengrens op BER (1)

$\Pr[\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_j | \mathbf{a} = \mathbf{a}_i]$ en $\Pr[\hat{\mathbf{a}}_n = \mathbf{a}_m | \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_m]$ moeilijk te berekenen

Eenvoudige bovengrens bepalen op $\Pr[\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_j | \mathbf{a} = \mathbf{a}_i]$

$$\Pr[\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_j | \mathbf{a} = \mathbf{a}_i] = \Pr\left[\bigcap_{\ell \neq j} (\|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)\|^2 \leq \|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_\ell)\|^2) | \mathbf{a} = \mathbf{a}_i \right]$$

$$\Rightarrow \Pr[\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_j | \mathbf{a} = \mathbf{a}_i] \leq \text{PEP}_{ji} = \Pr[\|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)\|^2 \leq \|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_i)\|^2 | \mathbf{a} = \mathbf{a}_i]$$

PEP : “pairwise error probability”

$$\text{BER} \leq \text{BER}_{\text{up}} = \sum_{i=1}^{M^N} \text{BER}_{\text{up}}(\mathbf{a}_i) \Pr[\mathbf{a} = \mathbf{a}_i]$$

$$\text{BER}_{\text{up}}(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{N \cdot \log_2(M)} \sum_{j=1}^{M^N} N_b(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \text{PEP}_{ji}$$

Bovengrens op BER (2)

Berekening PEP_{j|i}

$$\text{PEP}_{j|i} = \Pr[|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha_j)|^2 < |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha_i)|^2 | \mathbf{a} = \alpha_i]$$

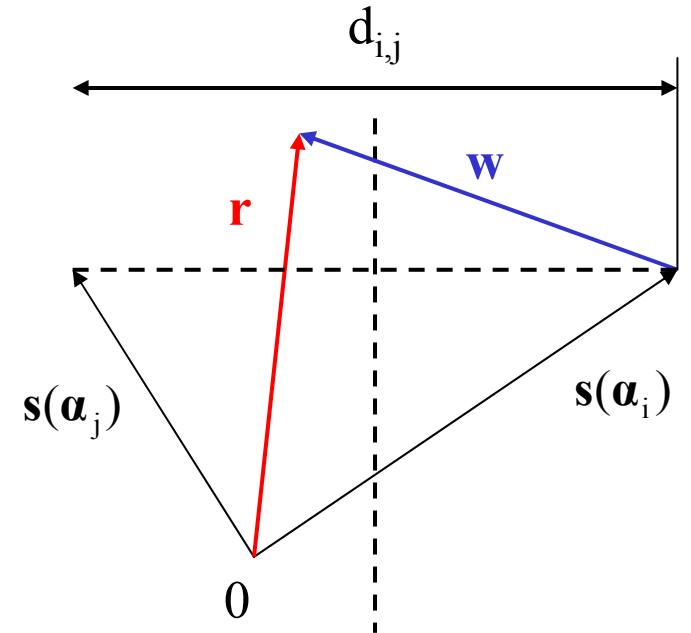
$$\mathbf{r} = \mathbf{s}(\alpha_i) + \mathbf{w}$$

$$= \Pr[|\Delta_{i,j} + \mathbf{w}|^2 < |\mathbf{w}|^2]$$

$$\Delta_{i,j} = \mathbf{s}(\alpha_i) - \mathbf{s}(\alpha_j)$$

$$= \Pr[2 \operatorname{Re}[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}] < -|\Delta_{i,j}|^2]$$

$$d_{i,j}^2 = |\Delta_{i,j}|^2 = |\mathbf{s}(\alpha_i) - \mathbf{s}(\alpha_j)|^2$$



Bovengrens op BER (2)

Berekening PEP_{j|i}

$$\text{PEP}_{j|i} = \Pr[|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)|^2 < |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_i)|^2 | \mathbf{a} = \mathbf{a}_i]$$

$$= \Pr[2 \operatorname{Re}[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}] < -|\Delta_{i,j}|^2]$$

$$\Delta_{i,j} = \mathbf{s}(\mathbf{a}_i) - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)$$

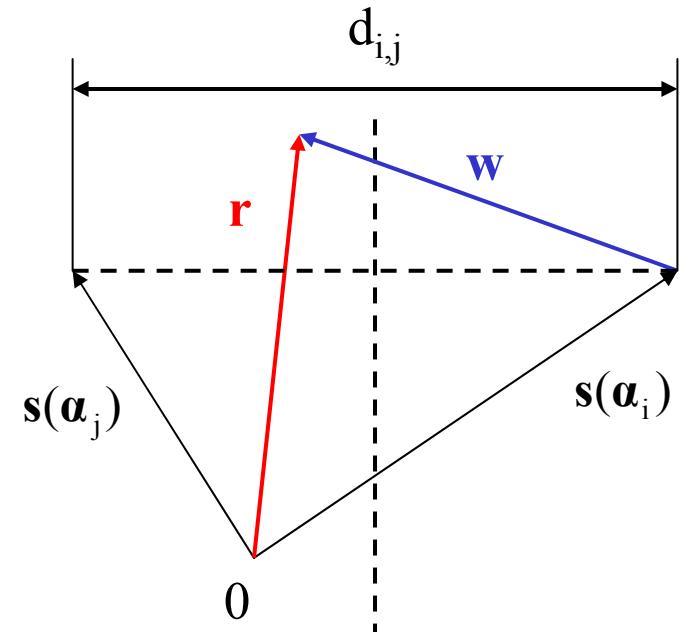
$$d_{i,j}^2 = |\Delta_{i,j}|^2 = |\mathbf{s}(\mathbf{a}_i) - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)|^2$$

\mathbf{w} is circulair symmetrisch (CS) $\Rightarrow \Delta_{i,j}^H \mathbf{w}$ is CS

$$E[|\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}|^2] = E[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w} \mathbf{w}^H \Delta_{i,j}] = 2\sigma_0^2 |\Delta_{i,j}|^2 = 2\sigma_0^2 d_{i,j}^2$$

$$\Delta_{i,j}^H \mathbf{w} \sim N_c(0, 2\sigma_0^2 d_{i,j}^2)$$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{Re}[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}] \sim N(0, 4\sigma_0^2 d_{i,j}^2)$$



Bovengrens op BER (2)

Berekening PEP_{j|i}

$$\begin{aligned} \text{PEP}_{j|i} &= \Pr[|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)|^2 < |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_i)|^2 | \mathbf{a} = \mathbf{a}_i] \\ &= \Pr[2 \operatorname{Re}[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}] < -|\Delta_{i,j}|^2] \end{aligned}$$

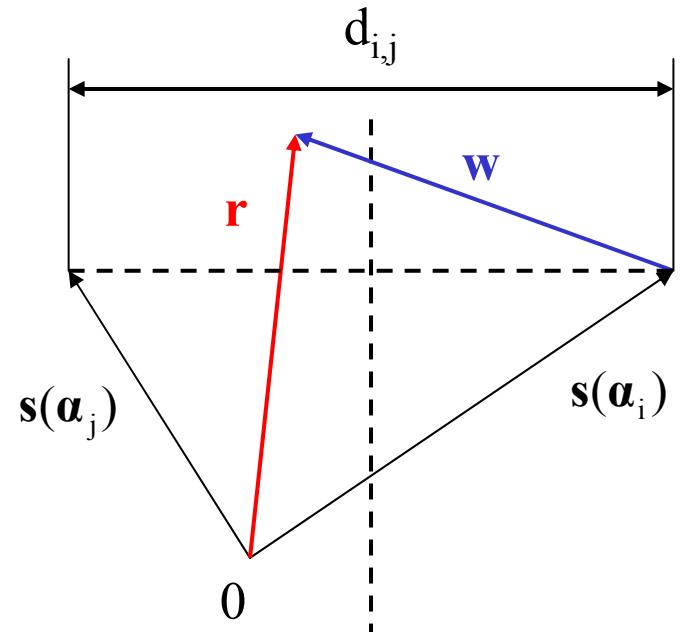
$$\Delta_{i,j} = \mathbf{s}(\mathbf{a}_i) - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)$$

$$d_{i,j}^2 = |\Delta_{i,j}|^2 = |\mathbf{s}(\mathbf{a}_i) - \mathbf{s}(\mathbf{a}_j)|^2$$

$$2 \operatorname{Re}[\Delta_{i,j}^H \mathbf{w}] \sim N(0, 4\sigma_0^2 d_{i,j}^2)$$

$$\Rightarrow \text{PEP}_{j|i} = Q\left(\sqrt{\frac{d_{i,j}^4}{4\sigma_0^2 d_{i,j}^2}}\right) = Q\left(\frac{d_{i,j}}{2\sigma_0}\right)$$

$$Q(v) = \int_v^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$



Bovengrens op BER (3)

$$\text{BER}_{\text{up}}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \frac{1}{N \cdot \log_2(M)} \sum_{j=1}^{M^N} N_b(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) Q\left(\frac{d_{i,j}}{2\sigma_0}\right)$$

$$\text{BER}_{\text{up}} = \sum_{i=1}^{M^N} \text{BER}_{\text{up}}(\boldsymbol{\alpha}_i) \Pr[\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i] = C \cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_0}\right) + \text{smaller terms}$$

$$d_{\min} = \min_{i \neq j} d_{i,j} = \min_{i \neq j} |s(\boldsymbol{\alpha}_i) - s(\boldsymbol{\alpha}_j)|$$

minimale Euclidische afstand
tussen signaalvectoren

$$C = \frac{1}{N \cdot \log_2(M)} \sum_{i=1}^{M^N} \left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}_j \in A_i} N_b(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) \right) \Pr[\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_i]$$

$$A_i = \{\boldsymbol{\alpha}_j, |s(\boldsymbol{\alpha}_i) - s(\boldsymbol{\alpha}_j)| = d_{\min}\}$$

verzameling van symboolvectoren, waarvan de
corresponderende signaalvectoren op minimale
afstand d_{\min} liggen van $s(\boldsymbol{\alpha}_i)$

Bovengrens op BER (4)

Voorbeeld 1

Observatiemodel : $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{w}$ ($s(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$) $\mathbf{w} \sim N_c(0, N_0 \mathbf{I}_N)$, $a_n \in \{-1, 1\}$

Stel : \mathbf{a}_i en \mathbf{a}_j verschillen in m posities

$$N_b(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = m \quad d_{i,j}^2 = 4m \quad d_{min} = 2 \quad (m=1)$$

Bij gegeven \mathbf{a}_i zijn er $C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ vectoren \mathbf{a}_j die in m posities verschillen met \mathbf{a}_i

$$BER_{up}(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N C_N^m m Q\left(\frac{\sqrt{m}}{\sigma_0}\right) \quad \text{hangt niet af van } \mathbf{a}_i$$

$$BER_{up} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N C_N^m m Q\left(\frac{\sqrt{m}}{\sigma_0}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) + \text{smaller terms}$$

Bovengrens op BER (4)

Voorbeeld 1

Observatiemodel : $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{w}$ ($s(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$) $\mathbf{w} \sim N_c(0, N_0 \mathbf{I}_N)$, $a_n \in \{-1, 1\}$

Stel : \mathbf{a}_i en \mathbf{a}_j verschillen in m posities

$$N_b(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = m \quad d_{i,j}^2 = 4m \quad d_{min} = 2 \quad (m=1)$$

Bij gegeven \mathbf{a}_i zijn er $C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ vectoren \mathbf{a}_j die in m posities verschillen met \mathbf{a}_i

$$BER_{up}(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N C_N^m m Q\left(\frac{\sqrt{m}}{\sigma_0}\right) \quad \text{hangt niet af van } \mathbf{a}_i$$

$$BER_{up} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N C_N^m m Q\left(\frac{\sqrt{m}}{\sigma_0}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) + \text{smaller terms}$$

term met $m=1$

termen met $m > 1$

Bovengrens op BER (5)

Voorbeeld 1 (vervolg)

Observatiemodel : $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{w}$ ($s(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$) $\mathbf{w} \sim N_c(0, N_0 \mathbf{I}_N)$, $a_n \in \{-1, 1\}$

ML decisieregel

$$\hat{\mathbf{a}} = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{a}}|^2 = \min_{\tilde{\mathbf{a}} \in C^N} \sum_{n=1}^N |r_n - \tilde{a}_n|^2$$

n-de term hangt enkel van \tilde{a}_n af \Rightarrow elke term afzonderlijk minimaliseren

$$\hat{a}_n = \min_{\tilde{a} \in C} |r_n - \tilde{a}|^2 = \max_{\tilde{a} \in C} (2\tilde{a} \operatorname{Re}[r_n]) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}[r_n])$$

Bovengrens op BER (6)

Voorbeeld 1 (vervolg)

$$\hat{a}_n = \min_{\tilde{a} \in C} |r_n - \tilde{a}|^2 = \max_{\tilde{a} \in C} (2\tilde{a} \operatorname{Re}[r_n]) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}[r_n])$$

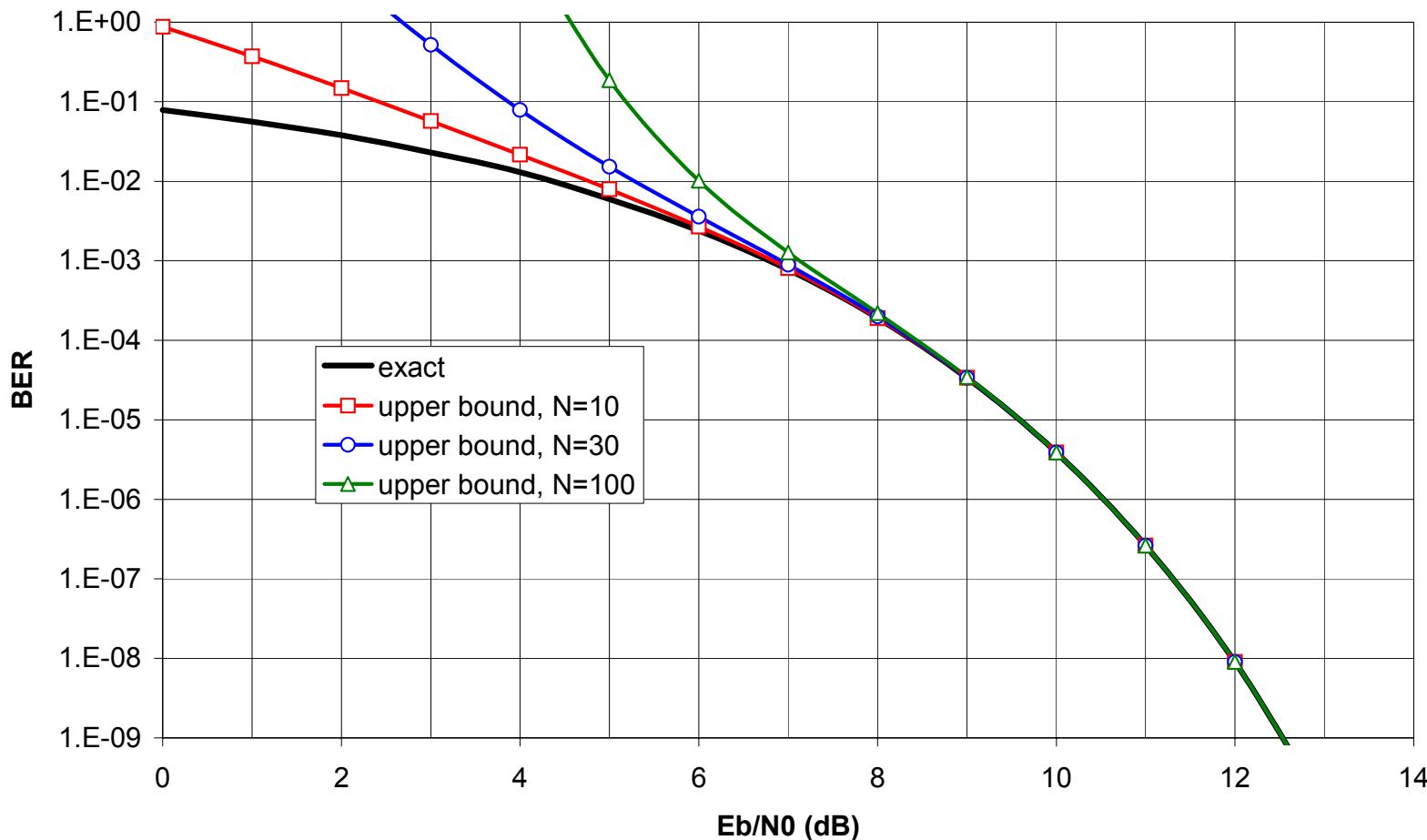
Exacte berekening BER (eenvoudig, omdat $s(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ en $a_n \in \{-1,1\}$)

$$\begin{aligned} \operatorname{BER}_n &= \frac{1}{2} \Pr[\hat{a}_n = 1 | a_n = -1] + \frac{1}{2} \Pr[\hat{a}_n = -1 | a_n = 1] \\ &= \frac{1}{2} \Pr[-1 + \operatorname{Re}[w_n] > 0] + \frac{1}{2} \Pr[1 + \operatorname{Re}[w_n] < 0] \\ &= Q\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) \quad \operatorname{Re}[w_n] \sim N(0, \sigma_0^2) \end{aligned}$$

$$\operatorname{BER} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \operatorname{BER}_n = Q\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) \quad \text{dominante term in } \operatorname{BER}_{\text{up}} = \operatorname{BER}$$

Bovengrens op BER (7)

Voorbeeld 1 (vervolg)



Bovengrens op BER (8)

Voorbeeld 2

scalaire observatie : $r = a + n$

$a \in C$ (M punten), $E[|a|^2] = E_s$

$n \sim N_c(0, N_0)$

Bovengrens op BER (8)

Voorbeeld 2

scalaire observatie : $r = a + n$

$a \in C$ (M even waarschijnlijke punten), $E[|a|^2] = E_s$

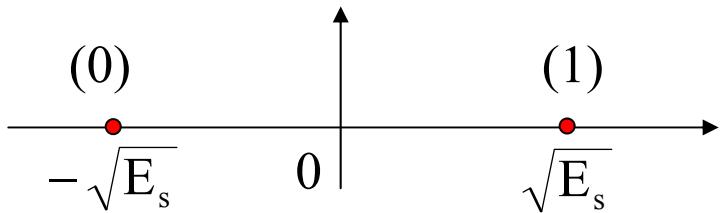
$n \sim N_c(0, N_0)$

$$\Rightarrow \text{BER} = \text{BER}_C(E_s/N_0)$$

 constellatie

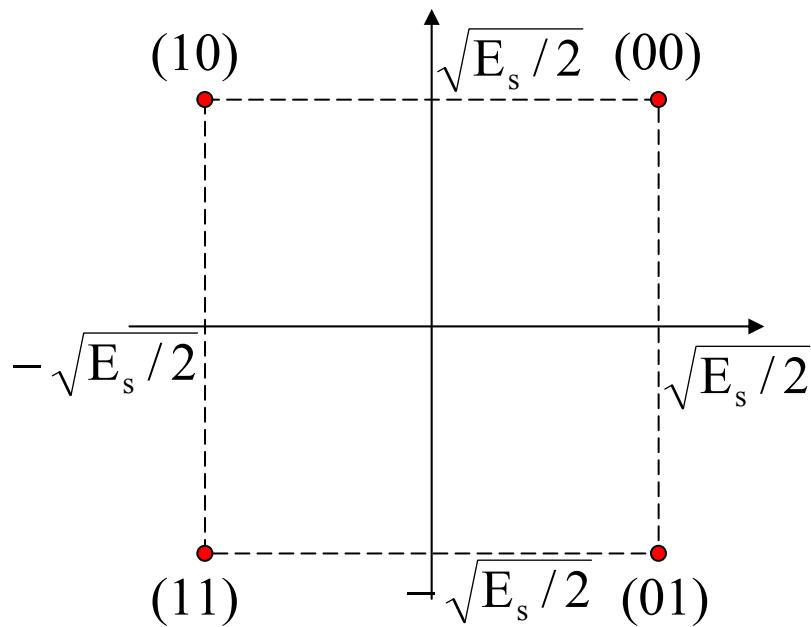
BER kan gemakkelijk **exact** berekend worden wanneer
decisielijnen evenwijdig zijn en/of loodrecht op elkaar staan
(M -PAM, M -QAM); exacte berekening moeilijk bij M -PSK met $M > 4$

Bovengrens op BER (9)



$$\left. \text{BER}_{2\text{-PAM}}\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \right|_{E_s=E_b} = \left. \text{BER}_{2\text{-PSK}}\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \right|_{E_s=E_b}$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



$$\left. \text{BER}_{4\text{-QAM}}\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \right|_{E_s=2E_b} = \left. \text{BER}_{4\text{-PSK}}\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \right|_{E_s=2E_b}$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Bovengrens op BER (10)

Voorbeeld 2 (vervolg)

Willekeurige constellatie : bovengrens op BER (via PEP)

$$\text{BER}_C\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \leq \frac{1}{\log_2(M)} \cdot \frac{1}{M} \sum_{m,m'=1}^M n_b(\alpha_m, \alpha_{m'}) Q\left(\sqrt{\frac{e_{m,m'}^2}{2N_0}}\right)$$

$e_{m,m'} = |\alpha_m - \alpha_{m'}|$ Euclidische afstand tussen constellatiepunten α_m en $\alpha_{m'}$

$$\text{BER}_C\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \approx C \cdot Q\left(\sqrt{\frac{e_{\min}^2}{2N_0}}\right) + \text{smaller terms} \quad e_{\min} = \min_{i \neq j} e_{i,j} \quad \begin{array}{l} \text{minimale afstand ts.} \\ \text{constellatiepunten} \end{array}$$

$$C = \frac{1}{\log_2(M)} \cdot \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{\alpha_{m'} \in A_m} n_b(\alpha_m, \alpha_{m'}) \quad A_m = \{\alpha_{m'}, |\alpha_m - \alpha_{m'}| = e_{\min}\}$$

Bovengrens op BER (11)

Voorbeeld 2 (vervolg)

Speciaal geval : Gray-mapping

(constellatiepunten op afstand e_{\min} verschillen in 1 bit)

$$\text{BER}_C\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \approx C \cdot Q\left(\sqrt{\frac{e_{\min}^2}{2N_0}}\right) + \text{smaller terms}$$

$$C = \frac{1}{\log_2(M)} \cdot \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{\alpha_m' \in A_m} n_b(\alpha_m, \alpha_m')$$

$A_m = \{\alpha_m' \mid |\alpha_m - \alpha_m'| = e_{\min}\}$

= 1 (Gray-mapping)

$$C = \frac{1}{\log_2(M)} \cdot \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \#_m$$

$\#_m = \text{aantal elementen in } A_m$
 $= \text{aantal buren van } \alpha_m \text{ op afstand } e_{\min}$

gemiddeld aantal buren op afstand e_{\min}

Continue-tijd Gaussiaanse observatie

$$r(t) = s(t; \mathbf{a}) + w(t) \quad w(t) \sim N_c(0, N_0 \delta(u))$$

Formules voor BER en BER_{up} blijven gelden, met

$$d_{i,j}^2 = \int |s(t; \mathbf{a}_i) - s(t; \mathbf{a}_j)|^2 dt$$

in plaats van

$$d_{i,j}^2 = |s(\mathbf{a}_i) - s(\mathbf{a}_j)|^2 = \sum_{k=1}^K |s_k(\mathbf{a}_i) - s_k(\mathbf{a}_j)|^2$$