Continue en discrete signalen en processen

Continue signalen en processen

Fouriergetransformeerde : $x(t) \leftrightarrow X(f)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)dt \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\exp(j2\pi ft)df$$

Convolutie (filterbewerking)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du \quad \Rightarrow \quad Y(f) = H(f)X(f)$$

Parceval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)Y(f)df$$

Vermogen, vermogenspectrum en autocorrelatiefunctie van stationaire processen

Autocorrelatiefunctie : $R_x(u) = E[x^*(t)x(t+u)]$
Vermogen : $E[|x(t)|^2] = R_x(0)$

Vermogenspectrum : $S_x(f) \leftrightarrow R_x(u)$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(u)\exp(-j2\pi fu)du \qquad R_x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\exp(j2\pi fu)df$$

Vermogen : $E[|x(t)|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df$

Vermogenspectrum na filter

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du \quad \Rightarrow \quad S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

Discrete signalen en processen

(de superscript 'D' slaat op 'discrete tijd')

Fouriergetransformeerde : $\{x_m\} \leftrightarrow X_D(\exp(j2\pi fT_s))$

$$X_D(\exp(j2\pi fT_s)) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \exp(-j2\pi fmT_s) \qquad x_m = T_s \int_{-1/(2T_s)}^{1/(2T_s)} X_D(\exp(j2\pi fT_s))\exp(j2\pi fmT_s)df$$

(x_{-m} is te interpreteren als de m-de Fouriercoëfficiënt in de Fourierreeks van de periodische functie $X_D(\exp(j2\pi fT_s))$)

Convolutie (filterbewerking)

$$y_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m x_{k-m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m h_{k-m} \quad \Rightarrow \quad Y_D(\exp(j2\pi fT_s))=H_D(\exp(j2\pi fT_s))X_D(\exp(j2\pi fT_s))$$

Parceval

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m^* y_m = T_s \int_{-1/(2T_s)}^{1/(2T_s)} X_D^*(\exp(j2\pi fT_s))Y_D(\exp(j2\pi fT_s))df$$

Vermogen, vermogenspectrum en autocorrelatiefunctie van stationaire processen

Autocorrelatiefunctie : $R_{D,x}(m) = E[x_m^* x_{k+m}]$

Vermogen : $E[|x_m|^2] = R_{D,x}(0)$

Vermogenspectrum : $S_{D,x}(\exp(j2\pi fT_s)) \leftrightarrow \{R_{D,x}(m)\}$

$$S_{D,x}(\exp(j2\pi fT_s)) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m \exp(-j2\pi fmT_s)$$

$$R_{D,x}(m) = T_s \int_{-1/(2T_s)}^{1/(2T_s)} S_{D,x}(\exp(j2\pi fT_s))\exp(j2\pi fmT_s)df$$

Vermogen : $E[|x_m|^2] = T_s \int_{-1/(2T_s)}^{1/(2T_s)} S_{D,x}(\exp(j2\pi fT_s))df$

Vermogenspectrum na filter :

$$y_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m x_{k-m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m h_{k-m} \quad \Rightarrow \quad S_{D,y}(\exp(j2\pi fT_s)) = |H_D(\exp(j2\pi fT_s))|^2 S_{D,x}(\exp(j2\pi fT_s))$$

Bemonstering van signalen en processen

Continu signaal/proces : $x(t) \leftrightarrow X(f)$
Monsterwaarden (debiet $1/T_s$) : $\{x_m\} = \{x(mT_s)\} \leftrightarrow X_D(\exp(j2\pi fT_s))$
Fourier transform van monsterwaarden : $X_D(\exp(j2\pi fT_s)) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$

Autocorrelatiefunctie continu proces : $R_x(u) = E[x^*(t)x(t+u)]$
Autocorrelatiefunctie monsterwaarden :
$R_{D,x}(m) = E[x_k^* x_{k+m}] = E[x^*(kT_s)x(kT_s + mT_s)] = R_x(mT_s)$
(autocorrelatiefunctie monsterwaarden = monsterwaarden van autocorrelatiefunctie van continu proces)

Vemogenspectrum continu proces : $S_x(f) \leftrightarrow R_x(u)$
Vermogenspectrum monsterwaarden : $S_{D,x}(\exp(j2\pi fT_s)) \leftrightarrow \{R_{D,x}(m)\}$

$$S_{D,x}(\exp(j2\pi fT_s)) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_x\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

Beschouw bemonstering die voldoet aan bemonsteringstheorema van Shannon :
$(x(t), y(t), h(t)) \leftrightarrow (X(f), Y(f), H(f))$, met $X(f) = Y(f) = H(f) = 0$ voor $|f| > B$
Stel $1/T_s > 2B$, dan geldt :

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_s)p(t - mT_s) \quad \text{met} \quad p(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = T_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_s)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt = T_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^*(mT_s)y(mT_s)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(kT_s - u)du = T_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(mT_s)x(kT_s - mT_s)$$