Detectie van gekende signalen in Gaussiaanse ruis

Binaire detectie in witte Gaussiaanse ruis

Observatie :

r(t) = s(t;H) + w(t)

Hierbij is r(t) ofwel het werkelijk ontvangen signaal (in dit geval zijn s(t;H) en w(t) reëel, en is w(t) witte Gaussiaanse ruis met spectrale dichtheid $N_0/2$), ofwel de complexe omhullende van het ontvangen banddoorlaatsignaal (in dit geval zijn s(t;H) en w(t) complex; w(t) is te schrijven als $w_I(t) + jw_Q(t)$, waarbij $w_I(t)$ en $w_Q(t)$ statistisch onafhankelijke witte Gaussiaanse ruisprocessen met spectrale dichtheid $N_0/2$ voorstellen). De kansfunctie p(**r**|H) is gegeven door

$$p(\mathbf{r} \mid H) = \exp\left(\frac{-1}{N_0} \int | r(t) - s(t;H) |^2 \, dt \right)$$

Test

Binaire hypothesetest : $\dfrac{p(\mathbf{r} \mid H_1)}{p(\mathbf{r} \mid H_0)} \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{\gtrless}} \eta$

De logaritme nemen van beide leden leidt tot de volgende test :

$$\ell = \mathrm{Re}\left[\int r(t) \Delta s^*(t) dt \right] \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{\gtrless}} \gamma = \frac{N_0}{2} \ln(\eta) + \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$$

waarbij $\Delta s(t) = s(t;H_1) - s(t;H_0)$ en $s(t;H_i) = \sqrt{E_i}\, s_i(t)$ met $\int | s_i(t) |^2 \, dt = 1$ (i = 0, 1). De grootheid E_i stelt dus de energie voor van $s(t;H_i)$. De resulterende decisiegebieden zijn afgebeeld in Fig. 1. Merk op dat het geval η=1 aanleiding geeft tot de (equivalente) test

$\int | r(t) - s(t;H_0) |^2 \, dt \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{\gtrless}} \int | r(t) - s(t;H_1) |^2 \, dt$, zodat de corresponderende decisielijn de middelloodlijn is van het lijnstuk dat de eindpunten van de vectoren $\mathbf{s}(H_1)$ en $\mathbf{s}(H_0)$ met elkaar verbindt.

Implementatie

De berekening van ℓ kan gebeuren door

- r(t) te correleren met Δs(t), en het reëel deel van de correlatie te nemen. De correlatie is gegeven door $\int r(t) \Delta s^*(t) dt$, en wordt bekomen door r(t) te vermenigvuldigen met $\Delta s^*(t)$ en het resultaat te integreren over de duur van Δs(t).

- r(t) aan te leggen aan een filter, aangepast (matched) aan $\Delta s(t)$, de uitgang te bemonsteren op t=0, en het reëel deel van de monsterwaarde te nemen. Het matched filter heeft een impulsantwoord $\Delta s^*(-t)$ en een transferfunctie $\Delta S^*(f)$. Stellen we de uitgang van het matched filter voor door z(t), dan geldt $z(t)=\int r(t-u)\Delta s^*(u)du$, zodat z(0) gelijk is aan de correlatie van r(t) en $\Delta s(t)$: $z(0)=\int r(-u)\Delta s^*(u)du=\int r(u)\Delta s^*(-u)du$. Wanneer $\Delta s(-t)$ niet nul is voor alle t<0, is het matched filter niet causaal, en dus niet realiseerbaar. Dit probleem wordt in de praktijk opgelost door r(t) te sturen door een filter met impulsantwoord $\Delta s^*(T_0-t)$, en de uitgang te bemonsteren op t = T_0 : stellen we $z_{T_0}(t)=\int r(t-u)\Delta s^*(T_0-u)du=\int r(t-T_0-u)\Delta s^*(-u)du$, dan geldt $z_{T_0}(t)=z(t-T_0)$, zodat $z_{T_0}(T_0)=z(0)$. De vertraging T_0 wordt voldoende groot genomen, zodat $\Delta s^*(T_0-t)$ = 0 voor t<0, en het filter met impulsantwoord $\Delta s^*(T_0-t)$ realiseerbaar is.

Performantie

Berekening van P_F en P_M

$P_F = \Pr[\ell>\gamma \mid H_0]$; $P_M = \Pr[\ell<\gamma \mid H_1]$

De grootheid ℓ is Gaussiaans omdat r(t) Gaussiaans is. Er geldt :

$$E[\ell \mid H_1]=E_1-\rho\sqrt{E_1E_0} \qquad E[\ell \mid H_0]=-E_0+\rho\sqrt{E_1E_0}$$

$$\mathrm{Var}[\ell \mid H_0]=\mathrm{Var}[\ell \mid H_1]=\mathrm{Var}\left[\mathrm{Re}\left[\int n(t)\Delta s^*(t)dt\right]\right]$$

$$=\frac{N_0}{2}\int|\Delta s(t)|^2\,dt=\frac{N_0}{2}(E_1+E_0-2\rho\sqrt{E_1E_0})$$,

waarbij $\rho=\mathrm{Re}\left[\int s_1^*(t)s_0(t)dt\right]$ het 'scalair produkt' is van $s_1(t)$ en $s_0(t)$ ($|\rho|\le1$). Hieruit volgt :

$$P_F=Q\left(\sqrt{\frac{\gamma-E[\ell \mid H_0]}{\mathrm{Var}[\ell \mid H_0]}}\right)=Q\left(\frac{d}{2}+\frac{\ln\eta}{d}\right) \qquad P_M=Q\left(\sqrt{\frac{-\gamma+E[\ell \mid H_1]}{\mathrm{Var}[\ell \mid H_1]}}\right)=Q\left(\frac{d}{2}-\frac{\ln\eta}{d}\right)$$, met

$d^2=\frac{2}{N_0}\int|\Delta s(t)|^2\,dt=\frac{2}{N_0}\left(E_1+E_0-2\rho\sqrt{E_1E_0}\right)$ de genormeerde kwadratische Euclidische afstand tussen de uitgezonden signalen $s(t;H_1)$ en $s(t;H_0)$, en

$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du$ gelijk aan het complement van de cumulatieve van de Gaussiaanse verdeling met gemiddelde gelijk aan nul en variantie gelijk aan 1. De performantie verbetert wanneer d toeneemt (bij gegeven P_M daalt P_F bij toenemende d). Merk op dat d enkel afhangt van E_0, E_1 en ρ, maar niet van de specifieke vorm van $s_1(t)$ en $s_0(t)$.

In het geval van ML detectie geldt η = 1, zodat $P_F = P_M = P_E = Q(d/2)$.

Optimalisatie van d

Door een geschikte keuze van $s(t;H_1)$ proberen we d te maximaliseren.

Bij gegeven ρ en gemiddelde energie E (= $(E_1+E_0)/2$) bepalen we E_1 en E_0 die d maximaliseert. Stel $E_0 = 2\alpha E$ en $E_1 = 2(1-\alpha)E$, met $0\leq\alpha\leq 1$, zodat
$d^2 = \frac{2}{N_0}2E\left(1-2\rho\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right)$. We bekomen de volgende resultaten.

- Als $\rho>0$ wordt d maximaal als $\alpha=0$ of $\alpha=1$. De signalen corresponderend met de twee hypothesen zijn een signaal met energie 2E en het nulsignaal (asymmetrisch binair). In dit geval bekomen we $d^2 = \frac{4E}{N_0}$, ongeacht de (positieve) waarde van ρ.
- Als $\rho=0$ (orthogonale signalen) bekomen we $d^2 = \frac{4E}{N_0}$, ongeacht de waarde van α.
- Als $\rho<0$ wordt d maximaal als α = 1/2 : voor beide hypothesen heeft het uitgezonden signaal een energie E (symmetrisch binair), en bekomen we $d^2 = \frac{4E}{N_0}(1-\rho)$. Over alle $\rho<0$ wordt d maximaal voor $\rho=-1$ (antipodale signalen), wat leidt tot $d^2 = \frac{8E}{N_0}$.

Hieruit leiden we af dat de beste performantie wordt bekomen bij antipodale signalen. Deze performantie is 3dB beter is dan bij orthogonale signalen.

Meervoudige detectie in witte Gaussiaanse ruis

We beschouwen het geval van lineaire digitale modulatie, waarbij een datasymbool M waarden kan aannemen. Het uitgezonden signaal is $s(t;H) = \sqrt{E_s}a(H)p(t)$, waarbij $a(H_m)$ = α_m (m = 0, 1, ..., M-1). We onderstellen dat het symbool a(H) en de puls p(t) genormeerd zijn, m.a.w. $E[|a(H)|^2] = 1$ en $\int |p(t)|^2\, dt = 1$. De logaritmische kansfunctie is gegeven door

$$\ln p(\mathbf{r}\,|\,H) = \frac{-1}{N_0}\left(E_s\,|a(H)|^2 - 2\sqrt{E_s}\,\mathrm{Re}\left[a^*(H)z\right]\right)$$

waarbij $z = \int r(t)p^*(t)dt$. De logaritmische kansfunctie is (op een van a(H) onafhankelijke term na) om te vormen tot

$$\ln p(\mathbf{r}\,|\,H) = \frac{-E_s}{N_0}\left(|a(H)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left[a^*(H)u\right] + |u|^2\right) = \frac{-E_s}{N_0}\left|a(H)-u\right|^2, \text{ met } u = \frac{z}{\sqrt{E_s}}$$

De ML decisieregel bepaalt de hypothese $\hat{H}$ die de kansfunctie maximaal maakt. De ML decisieregel leidt tot :

$$\hat{H} = H_m \Leftrightarrow \left|\alpha_m - u\right|^2 \leq \left|\alpha_i - u\right|^2,\ i = 0,1,\ldots,M-1$$

Voor $H=H_m$ is de grootheid u Gaussiaans, met gemiddelde gelijk aan $a(H_m) = \alpha_m$. Het reëel en imaginair deel van $u - \alpha_m$ zijn ongecorreleerd, en hebben een variantie gelijk aan $N_0/(2E_s)$. De specifieke vorm van p(t) heeft dus geen effect op de performantie; alleen de waarde van E_s/N_0 en de aard van de constellatie hebben invloed op de performantie.

Voorbeelden : decisieregel voor M-PAM, M-PSK, M-QAM

Implementatie

De grootheid z wordt bekomen door r(t) aan te leggen aan een filter dat aangepast is aan de zenderpuls p(t), en de uitgang te bemonsteren op t=0; dit filter heeft een impulsantwoord $p^*(-t)$ en een transferfunctie $P^*(f)$.

Bitfoutprobabiliteit

Een veel voorkomende performantiemaat bij digitale communicatie is de bitfoutprobabiliteit (BER), gegeven door

$$\mathrm{BER} = \frac{1}{\log_2(M)} \sum_{i,j=0}^{M} n_{bit}(i,j) \Pr[\hat{H}_i \mid H_j] \Pr[H_j]$$

waarbij $n_{bit}(i,j)$ gelijk is aan het aantal posities waarin de met α_i en α_j geassocieerde bitsequenties van lengte $\log_2(M)$ van elkaar verschillen; uiteraard geldt $n_{bit}(i,i) = 0$. In het geval van Gray-mapping verschillen naburige constellatiepunten in slechts 1 bit, zodat voor voldoend grote E_s/N_0 (zodat het verwarren van een constellatiepunt met een niet naburig constellatiepunt onwaarschijnlijk is) de benadering $n_{bit}(i,j) \cong 1$ opgaat voor $i \neq j$. Dit leidt tot

$\mathrm{BER} \cong \dfrac{P_E}{\log_2(M)}$, waarbij $P_E = \Pr[\hat{H} \neq H]$ de symboolfoutprobabiliteit voorstelt. Voor M-PAM en M-QAM kan P_E exact bepaald worden (zelfs de afzonderlijke waarschijnlijkheden $\Pr[\hat{H}_i \mid H_j]$ kunnen exact bepaald worden), terwijl voor M-PSK een eenvoudige bovengrens kan gevonden worden (zie cursus 'Communicatietechniek').

Transmissie over parallelle kanalen (witte ruis)

Beschouw K parallelle kanalen, en lineaire modulatie (transmissie van één enkel symbool). Het signaal aan de uitgang van het k-de kanaal is gegeven door

$r_k(t) = \sqrt{E_k}\, a(H) p_k(t) + w_k(t)$, voor k = 0, 1, ..., K-1

De witte ruisprocessen in de verschillende kanalen zijn ongecorreleerd; de in-fase en kwadratuurcomponent van $w_k(t)$ hebben een spectrale dichtheid $N_{0,k}/2$. De logaritmische kansfunctie is gegeven door de som van de logaritmische kansfuncties corresponderend met elk van de individuele signalen :

$\ln p(\mathbf{r} \mid H) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{-1}{N_{0,k}} \left(E_k \mid a(H) \mid^2 - 2\sqrt{E_k} \operatorname{Re}\left[a^*(H) z_k \right] \right)$, met $z_k = \int r_k(t) p_k^*(t) dt$, en kan (op een constante term na) omgevormd worden tot

$\ln p(\mathbf{r} \mid H) = -\left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{E_k}{N_{0,k}} \right) \left| a(H) - u \right|^2$, met $u = \left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{\sqrt{E_k} z_k}{N_{0,k}} \right) \Big/ \left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{E_k}{N_{0,k}} \right)$. De ontvanger vormt dus een grootheid u, die een lineaire combinatie is van de grootheden z_k. Voor $H = H_m$ geldt : $E[u \mid H_m] = \alpha_m$, en het reëel en imaginair deel van u - α_m zijn ongecorreleerd en hebben een variantie gelijk aan $\left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{2E_k}{N_{0,k}} \right)^{-1}$. Men kan aantonen dat de uitdrukking voor u de lineaire combinatie is van de grootheden z_k die de kleinst mogelijke variantie oplevert onder de restrictie dat $E[u \mid H_m] = \alpha_m$, vandaar de benaming 'maximum ratio combining' ('ratio' slaat op de SNR van de grootheid u, nl. de verhouding van het (gemiddeld) kwadraat van de nuttige term $E[u \mid H_m]$ tot het vermogen $Var[u \mid H_m]$ van de statistische fluctuatie van u). Qua performantie is een systeem met K parallelle kanalen dus equivalent met een systeem met slechts 1 kanaal, waarbij $\frac{E_s}{N_0} = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{E_k}{N_{0,k}}$.

Beschikt de zender over een gegeven totale energie $E = \sum_{k=0}^{K-1} E_k$ die over de verschillende kanalen moet verdeeld worden, dan bekomen we de beste performantie (dit betekent de maximale waarde voor $\sum_{k=0}^{K-1} \frac{E_k}{N_{0,k}}$) door alle energie te sturen over het kanaal met het laagste ruisspectrum, en de andere kanalen onbenut te laten, hetgeen resulteert in $\sum_{k=0}^{K-1} \frac{E_k}{N_{0,k}} = \frac{E}{N_{0,min}}$. Wanneer het laagste ruisspectrum optreedt in meer dan één kanaal, mag de energie E op een willekeurige manier over de subset van 'beste' kanalen verdeeld worden.

Transmissie van een datasequentie (witte ruis)

We beschouwen de transmissie van een sequentie $\{a_k\}$ van datasymbolen over een kanaal met witte ruis, waarbij we gebruik maken van lineaire modulatie. Het ontvangen signaal r(t) is gegeven door

$$r(t) = s(t;\mathbf{a}) + w(t) = \sqrt{E_s} \sum_k a_k p(t - kT) + w(t)$$

waarbij de datasymbolen a_k met waarschijnlijkheid 1/M, en onafhankelijk van elkaar, een waarde aannemen uit de verzameling $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{M-1}\}$. Een datasequentie van K symbolen, die elk M waarden kunnen aannemen, correspondeert dus met één uit M^K hypothesen. We onderstellen dat $E[|a_k|^2] = 1$ en $\int | p(t) |^2 \, dt = 1$, zodat E_s de energie per symbool voorstelt; het symbooldebiet is gelijk aan 1/T. De logaritmische kansfunctie wordt genoteerd als ln p(**r**|**a**), en is gegeven door

$$\ln p(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{a}) = \frac{-1}{N_0}\int\left(|\,s(t;\mathbf{a})\,|^2 - 2\,\mathrm{Re}[r(t)s^*(t;\mathbf{a})]\right)dt = \frac{-1}{N_0}\left(E_s\sum_{k,m}a_k^*a_m g(kT-mT) - 2\sqrt{E_s}\sum_k \mathrm{Re}[a_k^* z_k]\right)$$

waarbij

$$z_k = \int r(t)p^*(t-kT)dt \;\text{ en }\; g(t) = \int p^*(u)p(t+u)dt\text{, met } g(0) = 1.$$

De grootheid z_k wordt bekomen door r(t) aan te leggen aan een matched filter met impulsantwoord p*(-t), en de uitgang te bemonsteren op t=kT; g(t) is het antwoord van het matched filter op de puls p(t). De monsterwaarde z_k kan geschreven worden als

$$z_k = \underbrace{\sqrt{E_s}\,a_k g(0)}_{\text{nuttig}} + \underbrace{\sqrt{E_s}\sum_{m\neq 0}a_{k-m}g(mT)}_{\text{ISI}} + \underbrace{N(kT)}_{\text{ruis}}$$, waarbij N(t) het antwoord is van het matched filter op w(t). Daar alle datasequenties even waarschijnlijk zijn, minimaliseert het ML criterium de foutprobabiliteit $P_E = \Pr[\hat{\mathbf{a}} \neq \mathbf{a}]$. Volgens het ML criterium is de decisie $\hat{\mathbf{a}}$ de datasequentie die p(**r**|**a**) maximaal maakt. Het maximaliseren van p(**r**|**a**) wordt bemoeilijkt door de aanwezigheid van kruistermen van de vorm $a_k a_m g(kT-mT)$ met $k\neq m$. Deze kruistermen vallen weg wanneer p(t) zodanig is dat $g(mT) = \delta_m$, m.a.w. wanneer er geen ISI optreedt in de monsterwaarde z_k na het matched filter. Deze voorwaarde is equivalent met $\int p^*(t)p(t-mT)dt = \delta_m$. Rekening houdend met $G(f) = |P(f)|^2$, kan deze voorwaarde omgevormd worden tot

$$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|P\left(f+\frac{m}{T}\right)\right|^2 = 1\,.$$

Merk op dat aan deze voorwaarde onmogelijk kan voldaan worden wanneer p(t) een bandbreedte B heeft (P(f)=0 voor |f|>B) die kleiner is dan 1/(2T) (Nyquist criterium !). Wanneer er geen ISI optreedt in z_k wordt de logaritmische kansfunctie vereenvoudigd tot

$$\ln p(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{a}) = \frac{-1}{N_0}\sum_k\left(E_s\,|\,a_k\,|^2 - 2\sqrt{E_s}\,\mathrm{Re}[a_k^* z_k]\right)$$

Daar het k-de datasymbool a_k enkel invloed heeft op de k-de term in bovenstaande som, kan elke term afzonderlijk geoptimaliseerd worden : de decisie $\hat{a}_k$ is het constellatiepunt α_i dat het dichtst bij $u_k = z_k/\sqrt{E_s}$ is gelegen. Dit is dus dezelfde decisieregel als bij de transmissie van één enkel symbool.

Wanneer er wel ISI optreedt in z_k is de complexiteit van het maximaliseren van de kansfunctie in het algemeen exponentieel in de lengte van de datasequentie. Wanneer g(t) tijdsbeperkt is, kan de maximalisatie gebeuren met behulp van het Viterbi-algoritme, waarvan de rekencomplexiteit exponentieel toeneemt met de duur van g(t). Een minder complexe doch suboptimale methode bestaat er in de ISI na het matched filter te elimineren (of althans sterk te reduceren) met een egalisatiefilter dat werkt in discrete tijd; deze methode leidt echter tot een verhoogde ruisbijdrage aan de ingang van de decisie-eenheid.

Wanneer er een draaggolffrequentiefout F, een draaggolffasefout θ en een timingfout τ aanwezig is tussen de zender en de ontvanger, kunnen we stellen dat

$$r(t) = s(t;\mathbf{a}) + w(t) = \sqrt{E_s}\sum_k a_k p(t - kT - \tau)\exp(j(2\pi Ft + \theta)) + w(t)$$

Wanneer F, θ, en τ gekend zijn (in werkelijkheid maakt de ontvanger een schatting van deze parameters) wordt de logaritmische kansfunctie bekomen door z_k te herdefiniëren als

$$z_k = \int r(t)p_k^*(t)dt = \int r(t)\exp(-j(2\pi Ft + \theta))p^*(t - kT - \tau)dt$$

De bepaling van z_k is aangegeven in Fig. 2. De aanwezigheid van de parameters F, θ en τ heeft geen invloed op de performantie, omdat zij de statistiek van z_k niet wijzigen.

Detectie bij transmissie over een dispersief kanaal (witte ruis)

We beschouwen de transmissie van een signaal s(t;H) over een dispersief kanaal (met transferfunctie $H_{ch}(f)$), dat tevens witte Gaussiaanse ruis w(t) toevoegt. Het resulterend ontvangen signaal r(t) is gegeven door $r(t) = s_{rec}(t;H) + w(t)$, waarbij $s_{rec}(t)$ het antwoord is van het filter met transferfunctie $H_{ch}(f)$ op het uitgezonden signaal s(t;H) : $S_{rec}(f;H) = H_{ch}(f)S(f;H)$. Dit systeem is equivalent met de transmissie van een signaal $s_{rec}(t;H)$ over een niet dispersief kanaal dat enkel witte ruis w(t) toevoegt.

Bij een binaire hypothesetest is de performantiemaat d^2 gegeven door

$$d^2 = \frac{2}{N_0}\int |H_{ch}(f)|^2 |\Delta S(f)|^2\, df \quad \text{waarbij } \Delta S(f) = S(f;H_1) - S(f;H_0)$$

Door de lineaire vervorming vanwege het kanaal is d^2 niet louter afhankelijk van de energie E_Δ van $\Delta s(t)$, maar ook van de vorm van $\Delta s(t)$. Bij gegeven E_Δ kan d^2 gemaximaliseerd worden (met $2E_\Delta|H_{ch,max}|^2/N_0$ als absoluut maximum) door het verschilsignaal $\Delta s(t)$ oordeelkundig te kiezen.

Bij lineaire modulatie (transmissie van één enkel symbool) is de transferfunctie van het matched filter gegeven door $P^*(f)H_{ch}^*(f)$. Het ontvangen signaal r(t) wordt aangelegd aan het matched filter, waarvan de uitgang wordt bemonsterd op t=0. De resulterende monsterwaarde z wordt geschaald, zodanig dat voor de geschaalde waarde u geldt : $E[u|H_m] = \alpha_m$. De reële en imaginaire delen van de ruiscomponent $u-\alpha_m$ zijn statistisch onafhankelijk en hebben een variantie gelijk aan $\frac{N_0}{2E_s}\left(\int |H_{ch}(f)|^2 |P(f)|^2\, df\right)^{-1}$. Deze variantie kan geminimaliseerd worden door geschikte keuze van p(t), met als absoluut minimum $\frac{N_0}{2E_s\,|H_{ch,max}|^2}$

Detectie in gekleurde Gaussiaanse ruis

In het geval van gekleurde ruis sturen we het ontvangen signaal $r(t) = s(t;H) + n(t)$ door een witmakend filter met impulsantwoord $h_w(t)$ en transferfunctie $H_w(f)$, hetgeen leidt tot een signaal $r_w(t) = s_w(t;H) + n_w(t)$ met witte ruis $n_w(t)$, waarvan reëel en imaginair deel statistisch onafhankelijk zijn en een spectrale dichtheid hebben die gelijk is aan 1. Vervolgens passen we de theorie van de detectie in witte ruis toe op het signaal $r_w(t)$.

Bij een binaire hypothesetest stellen we $\Delta s(t) = s(t;H_1)-s(t;H_0)$ en $\Delta s_w(t) = s_w(t;H_1)-s_w(t;H_0)$. De performantiemaat d^2 is dan gegeven door

$$d^2 = \int |\Delta s_w(t)|^2\, dt = \iiint h_w^*(t-u)\Delta s^*(u) h_w(t-v)\Delta s(v)dudvdt$$

$$= \int |\Delta S(f)|^2 |H_w(f)|^2\, df = \int \frac{|\Delta S(f)|^2}{S_n(f+f_0)} df = \iint \Delta s^*(u) Q(u-v)\Delta s(v)dudv$$

waarbij $Q(t)$ de inverse Fourier transform is van $\Pi_{LP}(f)/S_n(f+f_0)$. In tegenstelling tot het geval van witte ruis, heeft niet enkel de energie maar ook de vorm van het verschilsignaal $\Delta s(t)$ invloed op de waarde van d^2. Door geschikte keuze van $\Delta s(t)$ kan d^2 gemaximaliseerd worden (met $E_\Delta/S_{n,min}$ als absoluut maximum) bij gegeven energie E_Δ van $\Delta s(t)$

Bij lineaire modulatie geldt $s(t;H) = \sqrt{E_s}\, a(H)p(t)$ (transmissie van één enkel symbool a(H)) en $s_w(t;H) = \sqrt{E_s}\, a(H)p_w(t)$, waarbij $p_w(t)$ het antwoord is van het witmakend filter op de zenderpuls p(t). De decisie gebeurt op basis van de grootheid z, gegeven door $z = \int r_w(t)p_w^*(t)dt = \int \frac{R(f)P^*(f)}{S_n(f+f_0)} df$. Deze grootheid wordt bekomen door r(t) aan te leggen aan een matched filter (dat rekening houdt met de gekleurde ruis) met transferfunctie $P^*(f)/S_n(f+f_0)$, en de uitgang te bemonsteren op t=0. Er geldt $z = \sqrt{E_s}\, a(H)g(0) + N$, met $g(0) = \int |P_w(f)|^2\, df$ en $|P_w(f)|^2 = |P(f)|^2/S_n(f+f_0)$; het reëel en het imaginair deel van de ruisbijdrage N zijn statistisch onafhankelijk, en hebben een variantie gelijk aan $\int |P_w(f)|^2\, df$. De ML decisieregel leidt tot :

$\hat{H} = H_m \Leftrightarrow |\alpha_m - u|^2 \le |\alpha_i - u|^2,\ i = 0,1,\ldots,M-1$, met $u = \frac{z}{\sqrt{E_s}\, g(0)}$. Voor $H=H_m$ is de grootheid u Gaussiaans, met gemiddelde gelijk aan $a(H_m) = \alpha_m$. Het reëel en imaginair deel van $u-\alpha_m$ zijn ongecorreleerd, en hebben een variantie gelijk aan $\left(E_s \int |P_w(f)|^2\right)^{-1}$. De aard van de constellatie en de waarde van deze variantie zijn bepalend voor de performantie. Door een geschikte keuze van p(t) kan deze variantie geminimaliseerd worden, met $S_{n,min}/E_s$ als absoluut minimum.

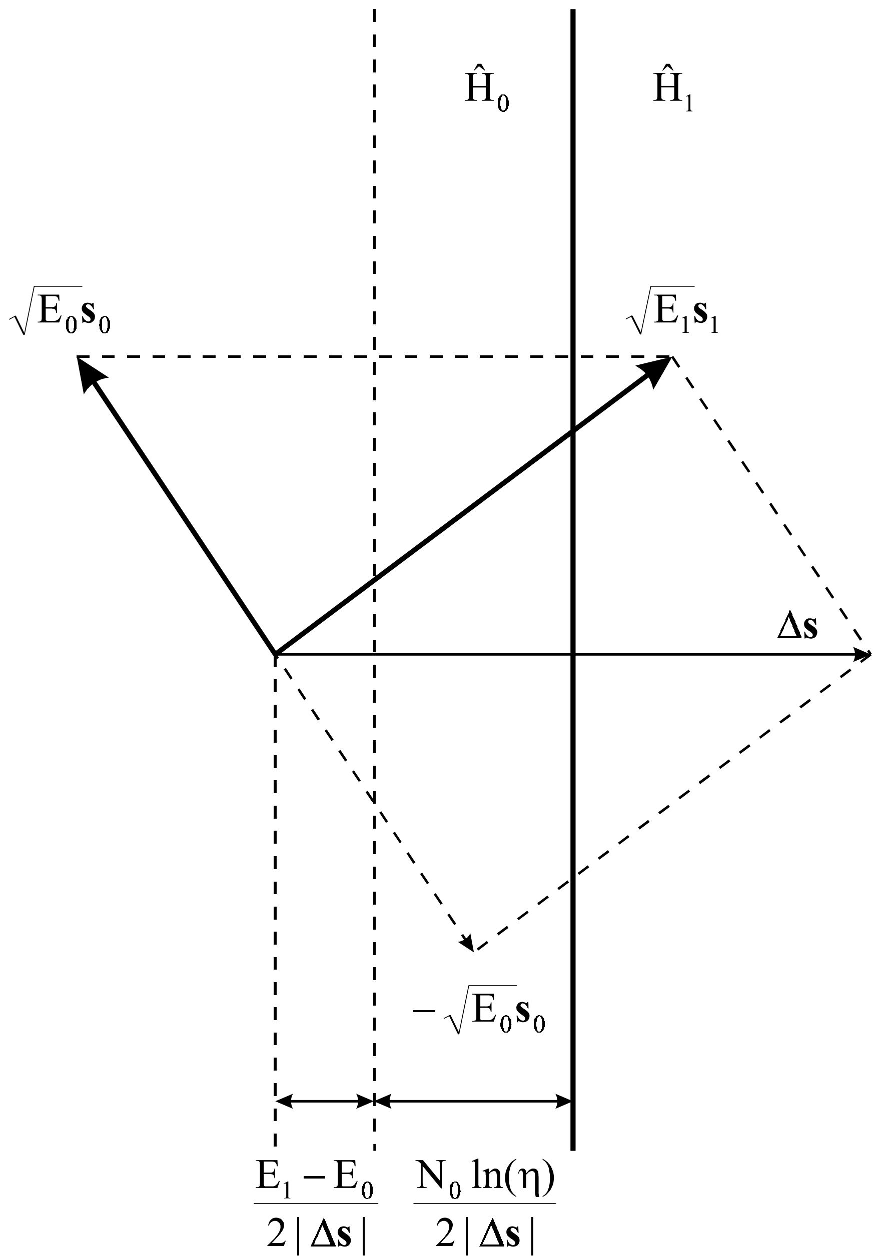

Fig. 1 : decisiegebieden voor binaire hypothesetest

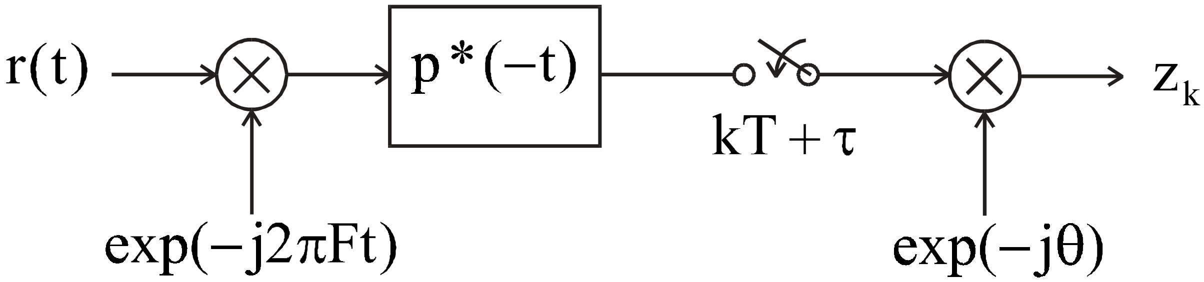

Fig. 2 : ontvangerstructuur met matched filter, en correctie voor frequentie, fase en timing.