

## Estimatie op basis van gekende signalen in ruis

We beperken ons tot het geval van stationaire witte Gaussiaanse ruis. Wanneer de ruis gekleurd is, kan het ontvangen signaal aangelegd worden aan een witmakend filter, waarna de theorie voor witte Gaussiaanse ruis toegepast wordt.

### Observatie

$r(t) = s(t; \mathbf{x}) + w(t)$ , waarbij  $\mathbf{x} \in X$  een te schatten vectorparameter voorstelt. Een complexe vectorparameter met  $M$  componenten wordt beschouwd als een reële vectorparameter met  $2M$  componenten, bestaande uit de reële en imaginaire delen van de oorspronkelijke parameter.

### Estimatieregels

ML estimatie :  $\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in X} p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) = \arg \max_{\mathbf{x} \in X} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x})$

MAP estimatie :  $\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in X} p(\mathbf{r} | \mathbf{x})p(\mathbf{x}) = \arg \max_{\mathbf{x} \in X} (\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) + \ln p(\mathbf{x}))$

waarbij  $p(\mathbf{x})$  de a priori distributie van de parameter  $\mathbf{x}$  voorstelt, en de kansfunctie  $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$  (op een van  $\mathbf{x}$  onafhankelijke factor na) gegeven is door  $p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) = \exp\left(\frac{-1}{N_0} \int |r(t) - s(t; \mathbf{x})|^2 dt\right)$ .

In de literatuur wordt onderscheid gemaakt tussen een deterministische en een stochastische parameter : in het eerste geval wordt de kansfunctie soms genoteerd als  $p(\mathbf{r}; \mathbf{x})$ , in het tweede geval als  $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$ . In deze cursus gebruiken we in beide gevallen de notatie  $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$ .

### Performantie : Cramer-Rao (CR) grenzen

#### a) Echte schatting

Wanneer de schatting van een parameter  $\mathbf{x}$  'echt' is (m.a.w.  $E_{r|\mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{x}$  voor *alle*  $\mathbf{x} \in X$ ), dan geldt de volgende ongelijkheid m.b.t. de correlatiematrix van de schattingsfout  $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  :

$E_{r|\mathbf{x}}[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T] \geq \mathbf{J}^{-1}$  (dit betekent dat  $E_{r|\mathbf{x}}[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T] - \mathbf{J}^{-1}$  een positief semidefiniete matrix is)

waarbij de verwachtingswaarde  $E_{r|\mathbf{x}}[\cdot]$  betrekking heeft op de conditionele distributie  $p(\mathbf{r}|\mathbf{x})$  (en niet op de (eventuele) a priori distributie van  $\mathbf{x}$ ), en dus een uitmiddeling over de ruis betekent. Hierbij stelt  $\mathbf{J}$  de Fisher-informatiematrix voor. Het element  $J_{m,n}$  van deze matrix is gegeven door :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{m,n} &= E_{r|\mathbf{x}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \right) \right] = -E_{r|\mathbf{x}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \right] \\ &= \frac{2}{N_0} \operatorname{Re} \left[ \int \frac{\partial s^*(t; \mathbf{x})}{\partial x_m} \frac{\partial s(t; \mathbf{x})}{\partial x_n} dt \right] \end{aligned}$$

Merk op dat  $\mathbf{J}$  in het algemeen nog afhangt van de te schatten parameter  $\mathbf{x}$ .

Stel  $\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_a^T, \mathbf{x}_b^T)$ , zodat de matrices  $\mathbf{J}$  en  $\mathbf{J}^{-1}$  kunnen opgedeeld worden in blokken :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{aa} & \mathbf{J}_{ab} \\ \mathbf{J}_{ba} & \mathbf{J}_{bb} \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{J}^{-1})_{aa} & (\mathbf{J}^{-1})_{ab} \\ (\mathbf{J}^{-1})_{ba} & (\mathbf{J}^{-1})_{bb} \end{pmatrix}. \text{ Merk op dat in het algemeen } (\mathbf{J}^{-1})_{aa} \text{ en } (\mathbf{J}^{-1})_{bb}$$

verschillend zijn van  $(\mathbf{J}_{aa})^{-1}$  en  $(\mathbf{J}_{bb})^{-1}$ . Definiëren we de schattingsfouten  $\boldsymbol{\varepsilon}_a = \hat{\mathbf{x}}_a - \mathbf{x}_a$  en  $\boldsymbol{\varepsilon}_b = \hat{\mathbf{x}}_b - \mathbf{x}_b$ , dan volgt uit de CR grens dat  $E_{\mathbf{r}|\mathbf{x}}[\boldsymbol{\varepsilon}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^T] \geq (\mathbf{J}^{-1})_{aa}$  en  $E_{\mathbf{r}|\mathbf{x}}[\boldsymbol{\varepsilon}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^T] \geq (\mathbf{J}^{-1})_{bb}$ . Passen we deze redenering toe op de component  $x_m$  van de te schatten vector  $\mathbf{x}$ , dan bekommen we  $E_{\mathbf{r}|\mathbf{x}}[(\hat{x}_m - x_m)^2] \geq (\mathbf{J}^{-1})_{m,m}$ .

Beschouwen we het geval waarbij  $\mathbf{x}_b$  a priori gekend is, en dus enkel  $\mathbf{x}_a$  geschat wordt, dan leidt de CR grens voor dit geval tot  $E_{\mathbf{r}|\mathbf{x}}[\boldsymbol{\varepsilon}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^T] \geq (\mathbf{J}_{aa})^{-1}$ . Wanneer  $\mathbf{x}_b$  gekend is, is de CR grens m.b.t. het schatten van  $\mathbf{x}_a$  is nooit hoger dan wanneer  $\mathbf{x}_b$  samen met  $\mathbf{x}_a$  geschat wordt :  $(\mathbf{J}^{-1})_{aa} \geq (\mathbf{J}_{aa})^{-1}$ . Beide CR grenzen zijn aan elkaar gelijk wanneer  $\mathbf{J}$  blokdiagonaal is, m.aw. als  $\mathbf{J}_{ab} = 0$ ; in dit geval zegt men dat de parameters  $\mathbf{x}_a$  en  $\mathbf{x}_b$  'ontkoppeld' zijn : de gezamenlijke schatting van  $\mathbf{x}_a$  en  $\mathbf{x}_b$  leidt dan tot dezelfde CR grenzen m.b.t.  $\mathbf{x}_a$  en  $\mathbf{x}_b$  als in de situatie waarbij één van deze parameters geschat wordt terwijl de andere gekend is.

Wanneer  $E_{\mathbf{r}|\mathbf{x}}[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T] = \mathbf{J}^{-1}$ , wordt de echte schatting  $\hat{\mathbf{x}}$  'efficiënt' genoemd.

Een onechte schatting kan leiden tot een foutcorrelatiematrix die lager is dan de CR grens.

Wanneer  $s(t;\mathbf{x})$  lineair is in  $\mathbf{x}$ , is de ML schatting echt en efficiënt. In de overige gevallen is de werkelijke performantie van de ML schatting moeilijk analytisch te berekenen, en is men aangewezen op benaderingen of simulaties; wanneer  $E/N_0$  onbeperkt toeneemt ( $E$  is de energie van  $s(t;\mathbf{x})$ ), wordt de ML schatting echt en efficiënt.

## b) Gekende a priori distributie

Heeft de te schatten vectorparameter  $\mathbf{x}$  een gekende a priori distributie  $p(\mathbf{x})$ , dan geldt, voor elke schatting  $\hat{\mathbf{x}}$ ,

$$E_{\mathbf{r},\mathbf{x}}[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T] \geq \mathbf{J}_{\text{tot}}^{-1}, \text{ waarbij } \boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \text{ de schattingsfout voorstelt}$$

Hierbij duidt  $E_{\mathbf{r},\mathbf{x}}[\cdot]$  op een uitmiddeling over de gezamenlijke distributie  $p(\mathbf{r},\mathbf{x}) = p(\mathbf{r}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$ . De matrix  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$  is gegeven door  $\mathbf{J}_D + \mathbf{J}_P$ , waarbij

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_D)_{m,n} &= E_{\mathbf{r},\mathbf{x}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \right) \right] = -E_{\mathbf{r},\mathbf{x}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \right] \text{ en} \\ &= E_{\mathbf{x}} \left[ \frac{2}{N_0} \text{Re} \left[ \int \frac{\partial s^*(t; \mathbf{x})}{\partial x_m} \frac{\partial s(t; \mathbf{x})}{\partial x_n} dt \right] \right] \end{aligned}$$

$$(\mathbf{J}_P)_{m,n} = E_{\mathbf{x}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \ln p(\mathbf{x}) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \ln p(\mathbf{x}) \right) \right] = -E_{\mathbf{x}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} \ln p(\mathbf{x}) \right]$$

en  $E_x[\cdot]$  slaat op uitmiddeling over de a priori distributie  $p(\mathbf{x})$ . Merk op dat  $\mathbf{J}_D = E_x[\mathbf{J}]$ , waarbij  $\mathbf{J}$  de Fisher informatiematrix voorstelt. Wanneer  $s(t; \mathbf{x})$  lineair is in  $\mathbf{x}$  en  $p(\mathbf{x})$  is Gaussiaans, dan geldt  $E_{r,x}[(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} - \mathbf{x})^T] = \mathbf{J}_{\text{tot}}^{-1}$ . In de overige gevallen is de werkelijke performantie van de MAP schatting moeilijk analytisch te berekenen, en is men aangewezen op benaderingen of simulaties; wanneer  $E/N_0$  onbeperkt toeneemt ( $E$  is de energie van  $s(t; \mathbf{x})$ ), nadert  $E_{r,x}[(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} - \mathbf{x})^T]$  tot  $\mathbf{J}_{\text{tot}}^{-1}$ .

Ook hier kunnen we de te schatten parametervector  $\mathbf{x}$  opsplitsen in twee vectoren  $\mathbf{x}_a$  en  $\mathbf{x}_b$ , en een CR grens m.b.t. de schattingsfouten  $\varepsilon_a$  en  $\varepsilon_b$  afleiden. Toegepast op de component  $x_m$  van  $\mathbf{x}$  leidt dit tot  $E_{r,x}[(\hat{x}_m - x_m)^2] \geq (\mathbf{J}_{\text{tot}}^{-1})_{m,m}$ . Wanneer  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$  blokdiagonaal is, zijn de corresponderende parameters ontkoppeld : de gezamenlijke schatting van  $\mathbf{x}_a$  en  $\mathbf{x}_b$  leidt dan tot dezelfde CR grenzen m.b.t.  $\mathbf{x}_a$  en  $\mathbf{x}_b$  als in de situatie waarbij één van deze parameters geschat wordt terwijl de andere gekend is.

### Opmerking

Beschouw het geval waarbij een scalaire *stochastische* parameter  $x$  moet geschat worden. Wanneer we ons beperken tot de klasse van *echte* schatters (m.a.w.  $E_{r|x}[\hat{x} | x] = x$  voor  $x \in X$ ), dan geldt  $E_{r|x}[(\hat{x} - x)^2] \geq 1/J(x)$ , zodat  $E_{r,x}[(\hat{x} - x)^2] \geq E_x[1/J(x)]$ . De CR grens m.b.t. alle mogelijke schatters is  $E_{r,x}[(\hat{x} - x)^2] \geq 1/(E_x[J] + J_p)$ . De grens voor echte schatters is niet lager dan de CR grens, omdat

$$\frac{1}{E_x[J(x)] + J_p} \leq \frac{1}{E_x[J(x)]} \leq E_x\left[\frac{1}{J(x)}\right]$$

De eerste ongelijkheid volgt uit  $J_p \geq 0$ , de tweede is het gevolg van het convex karakter van de functie  $1/u$  (voor  $u > 0$ ). De CR grens en de grens voor echte schatters vallen samen wanneer  $J_p = 0$  (m.a.w. wanneer de a priori distributie  $p(x)$  uniform is) en  $J(x)$  niet afhangt van  $x$ . Dit resultaat kan veralgemeend worden tot een vectorparameter  $\mathbf{x}$ .

Wanneer we een schatting  $\hat{\mathbf{x}}$  beschouwen die dicht bij  $\mathbf{x}$  is gelegen, kunnen we de volgende afgebroken Taylorreeksontwikkeling van de kansfunctie beschouwen :

$$\ln p(\mathbf{r} | \hat{\mathbf{x}}) \cong \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) + \varepsilon_x^T \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_x^T \left( \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \right) \varepsilon_x$$

Nemen we van beide leden het gemiddelde m.b.t.  $p(\mathbf{r} | \mathbf{x})$ , dan bekommen we

$$E_{r|x}[\ln p(\mathbf{r} | \hat{\mathbf{x}})] \cong E_{r|x}[\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x})] - \frac{1}{2} \varepsilon_x^T \mathbf{J} \varepsilon_x$$

waarbij we hebben gebruik gemaakt van

$$E_{r|x} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \right] = \int p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) d\mathbf{r} = 0$$

Het gemiddelde van de kansfunctie wordt dus maximaal voor  $\varepsilon_x = 0$ , en de 'scherpte' van dit maximum wordt bepaald door de Fisher informatiematrix  $\mathbf{J}$ . De kansfunctie zelf wordt maximaal wanneer

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x \cong -\left(\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x})\right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x})\right) \cong \mathbf{J}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x})\right)$$

Hierbij hebben we de tweede afgeleide van de kansfunctie benaderd door zijn verwachtingswaarde  $-\mathbf{J}$ . De resulterende foutcorrelatiematrix is gegeven door

$$E_{\mathbf{r}|\mathbf{x}}[\boldsymbol{\varepsilon}_x \boldsymbol{\varepsilon}_x^T] \cong \mathbf{J}^{-1} E_{\mathbf{r}|\mathbf{x}} \left[ \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x})\right) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x})\right)^T \right] \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}$$

waarbij we gesteund hebben op

$$\mathbf{J} = E_{\mathbf{r}|\mathbf{x}} \left[ \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x})\right) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{x})\right)^T \right]$$

Hieruit besluiten we dat de foutcorrelatiematrix m.b.t. de ML schatting bij benadering gelijk is aan de Cramer-Rao grens, op voorwaarde dat de verhouding van de energie van  $s(t;\mathbf{x})$  tot  $N_0$  groot genoeg is, zodat de kansfunctie kan benaderd worden door een parabool, en de tweede afgeleiden van de kansfunctie kunnen benaderd worden door hun verwachtingswaarde.

Een gelijkaardige redenering kan toegepast worden op  $\ln p(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{x}})$ . De verwachtingswaarde van  $\ln p(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{x}})$  m.b.t.  $p(\mathbf{r}, \mathbf{x})$  wordt maximaal voor  $\boldsymbol{\varepsilon}_x = 0$ , en de 'scherpte' van dit maximum wordt bepaald door de matrix  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$ . Wanneer de verhouding van de energie van  $s(t;\mathbf{x})$  tot  $N_0$  groot wordt, nadert de foutcorrelatiematrix van de MAP schatting tot  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$ .

## Amplitudeschatting

**Observatie** :  $r(t) = As(t) + w(t)$ , waarbij  $A = A_I + jA_Q$  een complexe amplitude (schaling plus rotatie) voorstelt. We beschouwen zowel ML-schatting als MAP-schatting van  $A$ ; in dit laatste geval nemen we aan dat  $A_I$  en  $A_Q$  statistisch onafhankelijke Gaussiaanse toevalsgrootheden zijn met gemiddelde nul en variantie  $\sigma^2$ .

### Estimatieregel

$$\ln p(\mathbf{r} | A) = \frac{-1}{N_0} (|A|^2 E - 2 \operatorname{Re}[A^* z]) \quad \ln p(A) = \frac{-1}{2\sigma^2} |A|^2$$

waarbij  $z = \int r(t)s^*(t)dt$  en  $|A|^2 = A_I^2 + A_Q^2$ .

ML-schatting :

$$\left( \frac{\partial}{\partial A_I} + j \frac{\partial}{\partial A_Q} \right) \ln p(\mathbf{r} | A) = \frac{-2}{N_0} (AE - z) = 0 \Rightarrow \hat{A}_{ML} = \frac{z}{E}$$

MAP-schatting

$$\left( \frac{\partial}{\partial A_I} + j \frac{\partial}{\partial A_Q} \right) (\ln p(\mathbf{r} | A) + \ln p(A)) = \frac{-2}{N_0} (AE - z) + \frac{-1}{\sigma^2} A = 0 \Rightarrow \hat{A}_{MAP} = \frac{z}{E} \cdot \left( 1 + \frac{N_0}{2\sigma^2 E} \right)^{-1}$$

Bij afwezigheid van ruis ( $r(t) = As(t)$ ) bekommen we  $\hat{A}_{ML} = \hat{A}_{MAP} = A$

### Performantie

Om de Cramer-Rao grens te berekenen maken we gebruik van

$$\frac{\partial}{\partial A_I} s(t; A) = s(t) \quad \frac{\partial}{\partial A_Q} s(t; A) = js(t) \quad \frac{\partial}{\partial A_I} \ln p(A) = \frac{-1}{\sigma^2} A_I \quad \frac{\partial}{\partial A_Q} \ln p(A) = \frac{-1}{\sigma^2} A_Q$$

ML-schatting : aan de Cramer-Rao grens is voldaan met gelijkheid

$$E_{r|A}[\hat{A}] = E_{r|A} \left[ \frac{1}{E} \int r(t)s^*(t)dt \right] = A; \quad \mathbf{J} = \frac{2E}{N_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_{r|A} \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_I^2 & \varepsilon_I \varepsilon_Q \\ \varepsilon_I \varepsilon_Q & \varepsilon_Q^2 \end{pmatrix} \right] = \frac{N_0}{2E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

waarbij  $\varepsilon_I = \hat{A}_I - A_I$  en  $\varepsilon_Q = \hat{A}_Q - A_Q$  de schattingsfouten voorstellen. Bij gegeven  $A_I$  en  $A_Q$  zijn de schattingsfouten Gaussiaans, gemiddeld nul en ongecorrleerd, en hebben dezelfde variantie. Merk op dat  $A_I$  en  $A_Q$  ontkoppeld zijn.

MAP-schatting : aan de Cramer-Rao grens is voldaan met gelijkheid

$$\mathbf{J}_T = \frac{2E}{N_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_{r,A} \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_I^2 & \varepsilon_I \varepsilon_Q \\ \varepsilon_I \varepsilon_Q & \varepsilon_Q^2 \end{pmatrix} \right] = \frac{N_0}{2E} \left( 1 + \frac{N_0}{2\sigma^2 E} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De schattingsfouten zijn Gaussiaans, gemiddeld (over ruis en A) gelijk aan nul en ongecorrleerd, en hebben dezelfde variantie. Merk op dat  $A_I$  en  $A_Q$  ontkoppeld zijn.

Wanneer  $N_0/(2\sigma^2 E) \ll 1$ , zijn de ML en MAP schattingen nagenoeg identiek, en leiden ze tot nagenoeg dezelfde performantie.

Bij de MAP schatting kunnen we de conditionele verwachtingswaarde (bij gegeven A) van de schatting en van de kwadratische schattingsfout berekenen. Dit geeft :

$$E_{r|A}[\hat{A}_{MAP}] = A \left(1 + \frac{N_0}{2\sigma^2 E}\right)^{-1}; \quad E_{r|A} \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_I^2 & \varepsilon_I \varepsilon_Q \\ \varepsilon_I \varepsilon_Q & \varepsilon_Q^2 \end{pmatrix} \right] = \frac{N_0}{2E} \cdot \frac{1 + \frac{A^2}{\sigma^2} \cdot \frac{N_0}{2\sigma^2 E}}{\left(1 + \frac{N_0}{2\sigma^2 E}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Merk op dat de MAP-schatting NIET echt is, en dat de conditionele gemiddelde kwadratische schattingsfout afhangt van  $A/\sigma^2$  : afhankelijk van de waarde van  $A/\sigma^2$  kan de conditionele gemiddelde kwadratische schattingsfout bij MAP-schatting groter of kleiner zijn dan bij de ML-schatting. Uitmiddeling over A van deze conditionele gemiddelde kwadratische schattingsfout levert de Cramer-Rao grens voor de MAP schatting op; deze is lager dan de Cramer-Rao grens voor de ML schatting.

**Voorbeeld** : lineaire digitale modulatie

Het uitgezonden signaal  $A_s(t)$  is gegeven door  $A_s(t) = A \sum_{k=-K}^K a_k p(t - kT)$ , waarbij de  $2K+1$  datasymbolen a priori gekend zijn (trainingsequentie). Zowel de ML- als de MAP-schatting van A maken gebruik van de grootte  $z$ , die gegeven is door  $z = \sum_{k=-K}^K a_k^* z_k$ , waarbij  $z_k$  bekomen wordt door  $r(t)$  aan te leggen aan een matched filter met impulsantwoord  $p^*(-t)$ , en de uitgang te bemonsteren op het tijdstip  $kT$ .

De energie E van  $s(t)$  is gelijk aan

$$E = \sum_{m,n=-K}^K a_m^* a_n g(mT - nT)$$

waarbij  $g(t)$  het antwoord is van het matched filter op de puls  $p(t)$ . De energie E hangt dus in principe af van de trainingssymbolen. Wanneer echter de trainingsequentie random wordt gegenereerd (en meegedeeld aan zender en ontvanger), en  $KT$  veel groter is dan de duur van  $g(t)$ , mogen we bovenstaande energie benaderen door het gemiddelde over de random symbolen; dit geeft  $E \cong (2K+1)E[|a_k|^2]g(0)$ . Wanneer  $|a_k|$  constant is en  $g(kT) = \delta_k$  (geen ISI na matched filter), is E exact gelijk aan  $(2K+1)E[|a_k|^2]g(0)$ . Merk op dat  $g(0)$  gelijk is aan de energie van  $p(t)$ . Bij de ML schatting is de gemiddelde kwadratische schattingsfout dus omgekeerd evenredig met de lengte  $2K+1$  van de trainingsequentie; bij de MAP schatting geldt deze wetmatigheid enkel wanneer  $2K+1 \gg N_0/(g(0)\sigma^2)$ .

## Fase- en frequentieschatting

### Observatie

$$r(t) = s(t; \theta, F) + w(t) = s(t) \exp(j(2\pi Ft + \theta)) + w(t)$$

waarbij  $F$  en  $\theta$  een onbekende frequentieoffset en fase voorstellen, na demodulatie van een banddoorlaatsignaal. Merk op dat  $2\pi Ft + \theta$  een lineair in de tijd variërende fase voorstelt, die op  $t=0$  de waarde  $\theta$  aaneemt.

### Estimatieregels

Gezamenlijke ML schatting van  $F$  en  $\theta$  :

$$(\hat{\theta}_{ML}, \hat{F}_{ML}) = \arg \max_{\theta, F} (L(\theta, F)),$$

$$\text{met } L(\theta, F) = \text{Re}[e^{-j\theta} L(F)] \quad \text{en} \quad L(F) = \int r(t) s^*(t) \exp(-j2\pi Ft) dt$$

Deze tweedimensionale zoekprocedure over  $F$  en  $\theta$  kan teruggebracht worden tot een ééndimensionale zoekprocedure over  $F$ , gevolgd door een berekening van  $\hat{\theta}$  :

$$\hat{F} = \arg \max_F (|L(F)|); \quad \hat{\theta} = \arg(L(\hat{F}_{ML}))$$

De schatting  $\hat{F}$  correspondeert met het maximum van de modulus van de Fourier transform van  $r(t)s^*(t)$ , en  $\hat{\theta}$  is het argument van de Fourier transform voor  $F = \hat{F}$ .

Het is instructief om na te gaan wat  $L(\hat{\theta}, \hat{F})$  en  $L(\hat{F})$  worden bij afwezigheid van ruis (zodat  $r(t) = s(t; \theta, F)$ ). Introduceren we de schattingsfouten  $\varepsilon_\theta = \hat{\theta} - \theta$  en  $\varepsilon_F = \hat{F} - F$ , dan geldt

$$L(\hat{\theta}, \hat{F}) = \int |s(t)|^2 \cos(2\pi\varepsilon_F t + \varepsilon_\theta) dt \quad \text{en} \quad L(\hat{F}) = e^{j\theta} \int |s(t)|^2 \exp(-j2\pi\varepsilon_F t) dt$$

$L(\hat{\theta}, \hat{F})$  wordt maximaal wanneer  $\cos(2\pi\varepsilon_F t + \varepsilon_\theta) = 1$ , dus als  $\varepsilon_F = 0$  en  $\varepsilon_\theta$  een veelvoud is van  $2\pi$ . Door toepassen van de Schwarz-ongelijkheid (zie Appendix) vinden we dat  $|L(\hat{F})|$  maximaal wordt voor  $\varepsilon_F = 0$ . Hieruit volgt dat bij afwezigheid van ruis de ML-schattingen inderdaad de correcte waarden van  $\theta$  (op een veelvoud van  $2\pi$  na) en  $F$  opleveren.

### Performantie : CR grens

Bij de berekening van de CR grens steunen we op

$$\frac{\partial}{\partial \theta} s(t; \theta, F) = j s(t; \theta, F) \quad \frac{\partial}{\partial F} s(t; \theta, F) = j2\pi t s(t; \theta, F)$$

zodat

$$J_{\theta\theta} = \frac{2E}{N_0} \quad J_{\theta F} = \frac{2}{N_0} \int 2\pi t |s(t)|^2 dt \quad J_{FF} = \frac{2}{N_0} \int 4\pi^2 t^2 |s(t)|^2 dt$$

waarbij E gelijk is aan de energie van s(t). We introduceren de grootheden  $t_s$  en  $T_s$ , bepaald door

$$t_s = \frac{\int t |s(t)|^2 dt}{\int |s(t)|^2 dt} \quad T_s^2 = \frac{\int (t - t_s)^2 |s(t)|^2 dt}{\int |s(t)|^2 dt}$$

Hierbij is  $t_s$  het 'zwaartepunt' van  $|s(t)|^2$ . De CR grens herleidt zich tot :

$$\begin{pmatrix} E[\varepsilon_\theta^2] & E[\varepsilon_\theta \varepsilon_F] \\ E[\varepsilon_\theta \varepsilon_F] & E[\varepsilon_F^2] \end{pmatrix} \geq \frac{N_0}{2E} \begin{pmatrix} 1 & 2\pi t_s \\ 2\pi t_s & 4\pi^2 (t_s^2 + T_s^2) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{N_0}{2E} \cdot \frac{1}{4\pi^2 T_s^2} \begin{pmatrix} 4\pi^2 (t_s^2 + T_s^2) & -2\pi t_s \\ -2\pi t_s & 1 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt dat de parameters  $\theta$  en F gekoppeld zijn wanneer  $t_s \neq 0$ . De grens op de gemiddelde kwadratische frequentiefout (fasefout) hangt niet (wel) af van  $t_s$ . Kiezen we de oorsprong van de tijdas zo dat  $t_s = 0$ , dan bekommen we

$$E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \geq \frac{N_0}{2E} \quad E[(\hat{F} - F)^2] \geq \frac{N_0}{2E} \cdot \frac{1}{4\pi^2 T_s^2}$$

Merk op dat de grens op de gemiddelde kwadratische fasefout minimaal wordt voor  $t_s = 0$ .

Op basis van de schattingen  $\hat{\theta}$  and  $\hat{F}$  maakt de ontvanger een schatting  $2\pi\hat{F}t + \hat{\theta}$  van de ogenblikkelijke fase  $2\pi Ft + \theta$ . De resulterende gemiddelde kwadratische schattingsfout is begrensd door

$$E[(2\pi\varepsilon_F t + \varepsilon_\theta)^2] \geq \frac{N_0}{2E} \left( 1 + \frac{(t - t_s)^2}{T_s^2} \right)$$

De grens op de gemiddelde kwadratische schattingsfout wordt groter naarmate t verder van  $t_s$  is gelegen.

### Voorbeelden

a) Wanneer  $s(t) = \begin{cases} \sqrt{P} & |t| < T_0/2 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$  stelt r(t) de complexe omhullende voor van een segment

(tijdsduur  $T_0$ ) van een sinusoïde met vermogen P. De energie van s(t) is gegeven door  $E = PT_0$ .

Verder geldt  $t_s = 0$  en  $T_s^2 = T_0^2/12$ . Hieruit volgt :

$$E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \geq \frac{N_0}{2PT_0} \quad E[(\hat{F} - F)^2] \geq \frac{N_0}{2PT_0} \cdot \frac{3}{\pi^2 T_0^2}$$

De grens op de gemiddelde kwadratische fasefout en frequentiefout zijn omgekeerd evenredig met respectievelijk  $T_0$  en  $T_0^3$ . Verder geldt voor de gemiddelde kwadratische fout op de schatting van de ogenblikkelijke fase :

$$E[(2\pi\varepsilon_F t + \varepsilon_\theta)^2] \geq \frac{N_0}{2PT_0} \left( 1 + \frac{12 t^2}{T_0^2} \right)$$

Merk op dat deze grens bij  $|t| = T_0/2$  (rand observatie-interval) vier keer zo groot is als bij  $t=0$  (midden observatie-interval). Extrapolatie van de schatting van de ogenblikkelijke fase tot buiten het observatie-interval ( $-T_0/2, T_0/2$ ) leidt tot nog grotere fouten.



b) Wanneer  $s(t) = \sqrt{E_s} \sum_{k=-K}^K a_k p(t - kT)$ , geldt

$$L(F) = \sum_{k=-K}^K a_k^* \int r(t) p^*(t - kT) \exp(-j2\pi Ft) dt \cong \sum_{k=-K}^K a_k^* z_k \exp(-j2\pi FkT),$$

waarbij  $z_k = \int r(t) p^*(t - kT) dt$  wordt bekomen door  $r(t)$  aan te leggen aan een matched filter met impulsantwoord  $p^*(-t)$  en de uitgang te bemonsteren op  $t = kT$ . De bovenstaande benadering impliceert dat  $\exp(j2\pi Ft)$  weinig varieert over de duur van de puls  $p(t)$ , zodat we  $p^*(t-kT)\exp(-j2\pi Ft)$  kunnen benaderen door  $p^*(t-kT) \exp(-j2\pi FkT)$ . Deze benadering biedt het voordeel dat bij de zoekprocedure over  $F$  de grootheden  $z_k$  niet hoeven herberekend te worden bij iedere nieuwe testwaarde van  $F$ .

Ook bij het berekenen van de CR grens maken we van deze benadering gebruik. We bepalen de elementen van de Fisher informatiematrix als de verwachtingswaarde van de tweede afgeleiden van de logaritmische kansfunctie. We bekomen, voor traag variërende  $\exp(j2\pi Ft)$ ,

$$\begin{pmatrix} J_{\theta\theta} \\ J_{\theta F} \\ J_{FF} \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{E_s}}{N_0} \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=-K}^K \begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi kT \\ (2\pi kT)^2 \end{pmatrix} E[z_k] a_k^* \exp(-j\theta_k) \right], \text{ waarbij } \theta_k = 2\pi FkT + \theta. \text{ Verder geldt,}$$

voor traag variërende  $\exp(j2\pi Ft)$ ,  $E[z_k] = \sqrt{E_s} \exp(j\theta_k) \sum_{m=-K}^K a_m g(kT - mT)$ , waarbij  $g(t)$  het antwoord is van het matched filter (impulsantwoord  $p^*(-t)$ ) op de zenderpuls  $p(t)$ . Als we aannemen dat er na het matched filter geen ISI optreedt ( $g(iT) = \delta_i$ ), bekomen we  $E[z_k] = \sqrt{E_s} a_k \exp(j\theta_k)$ , zodat

$$\begin{pmatrix} J_{\theta\theta} \\ J_{\theta F} \\ J_{FF} \end{pmatrix} = \frac{2E_s}{N_0} \sum_{k=-K}^K |a_k|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi kT \\ (2\pi kT)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (2K+1)^2 \pi^2 T^2 / 3 \end{pmatrix}$$

Hierbij hebben we ondersteld dat alle trainingsymbolen dezelfde modulus hebben ( $|a_k|^2 = 1$ ). Is de modulus niet constant, en zijn de symbolen random met  $E[|a_k|^2] = 1$ , dan is bovenstaande uitdrukking een goede benadering voor grote  $2K+1$ . Voor het overige hebben de trainingsymbolen geen invloed op de performantie. We merken op dat  $\theta$  en  $F$  ontkoppeld zijn, en dat de CR gegeven is door

$$E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \geq \frac{N_0}{2E_s} \cdot \frac{1}{2K+1} \quad E[(\hat{F} - F)^2] \geq \frac{N_0}{2E_s} \cdot \frac{3}{\pi^2 T^2} \cdot \frac{1}{(2K+1)^3}$$

Deze resultaten zijn dezelfde als bij het ontvangen van een segment van een sinusoïde met vermogen  $P = E/T$  en duur  $T_0 = (2K+1)T$ .

Fig. 1 toont het verloop van  $|E[L(\hat{F})]| = |\sin(\pi(2K+1)\varepsilon_F T) / \sin(\pi\varepsilon_F T)|$ , rekening houdend met bovenstaande veronderstellingen ( $g(iT) = \delta_i$ ,  $|a_k| = 1$ ). Merk op dat  $E[L(\hat{F})]$ , naast het globaal maximum bij  $\varepsilon_F=0$ , nog verschillende lokale maxima vertoont. Bij hoge  $E_s/N_0$  bevindt het globaal maximum van  $L(\hat{F})$  zich rond  $\varepsilon_F=0$ , maar bij voldoende lage  $E_s/N_0$  kunnen 'outliers' optreden : het globaal maximum van  $L(\hat{F})$  ligt dan in de buurt van een secundair maximum van  $E[L(\hat{F})]$ , waardoor de gemiddelde kwadratische schattingsfout sterk toeneemt; de gemiddelde kwadratische fout vertoont een drempeleffect als functie van  $E_s/N_0$  (zie Fig. 2).

## Schatting van de tijdsvertraging

### Observatie

$$r(t) = s(t; \tau) + w(t) = s(t - \tau) + w(t)$$

Hierbij stelt  $\tau$  de te schatten tijdsvertraging voor.

### Estimatieregels : ML schatting

$$\hat{\tau}_{\text{ML}} = \arg \max_{\tau} (L(\tau)), \text{ met } L(\tau) = \text{Re} \left[ \int r(t) s^*(t - \tau) dt \right]$$

Het bepalen van de ML schatting vereist dus een ééndimensionale zoekprocedure.

Bij afwezigheid van ruis ( $r(t) = s(t; \tau)$ ) bekommen we

$L(\hat{\tau}) = \text{Re} \left[ \int s(t - \tau) s^*(t - \hat{\tau}) dt \right] = \text{Re} \left[ \int s(t) s^*(t - \varepsilon_{\tau}) dt \right]$ , waarbij  $\varepsilon_{\tau} = \hat{\tau} - \tau$  de timingfout voorstelt. Wegens de Schwarz-ongelijkheid (zie Appendix) bereikt  $L(\hat{\tau})$  een maximale waarde  $\int |s(t)|^2 dt$  voor  $\varepsilon_{\tau} = 0$ . Hieruit volgt dat bij afwezigheid van ruis de ML schatting de correcte waarde van  $\tau$  oplevert.

### Performantie : CR grens

Bij de berekening van de CR grens ( $E[\varepsilon_{\tau}^2] \geq 1/J_{\tau\tau}$ ) steunen we op  $\frac{\partial}{\partial \tau} s(t; \tau) = -\dot{s}(t - \tau)$ , waarbij  $\dot{s}(t)$  de afgeleide van  $s(t)$  naar  $t$  voorstelt. Hieruit volgt

$$J_{\tau\tau} = \frac{2}{N_0} \int |\dot{s}(t - \tau)|^2 dt = \frac{2}{N_0} \int |\dot{s}(t)|^2 dt = \frac{2}{N_0} \int 4\pi^2 f^2 |S(f)|^2 df.$$

Merk op dat de grens op de gemiddelde kwadratische timingfout omgekeerd evenredig is met de energie van de afgeleide van  $s(t)$ . Dit houdt in dat de aanwezigheid van hoge frequenties in  $s(t)$  de nauwkeurigheid van de schatting in gunstige zin beïnvloedt.

### Voorbeeld

Wanneer  $s(t) = \sqrt{E_s} \sum_{k=-K}^K a_k p(t - kT)$ , geldt  $L(\tau) = \text{Re} \left[ \sum_{k=-K}^K a_k^* z_k(\tau) \right]$ , waarbij  $z_k(\tau)$  wordt

bekomen door het ontvangen signaal aan te leggen aan het matched filter met impulsantwoord  $p^*(-t)$ , en het resulterend signaal  $z(t)$  te bemonsteren op het tijdstip  $kT + \tau$ :  $z_k(\tau) = z(kT + \tau)$ . Bij een digitale implementatie is het signaal  $z(t)$  aan de uitgang van het matched filter enkel op discrete tijdstippen  $mT_s$  beschikbaar. In dit geval wordt  $z_k(\tau)$  door interpolatie berekend uit de beschikbare monsterwaarden  $z(mT_s)$ .

We beschouwen nu achtereenvolgens een trainingsequentie met random symbolen, met identieke symbolen ( $a_k = 1$ ), en met alternerende symbolen ( $a_k = (-1)^k$ ), en bepalen telkens  $J_{\tau\tau}$ . Hierbij maken we devolgende benadering

$$J_{\tau\tau} = \frac{2E_s}{N_0} \int \left| \sum_{m=-K}^K a_m \dot{p}(t - mT) \right|^2 dt \cong \frac{2E_s}{N_0} \int_{-(K+1/2)T}^{+(K+1/2)T} \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \dot{p}(t - mT) \right|^2 dt$$

die accuraat is wanneer  $(2K+1)T$  veel groter is dan de duur van de puls  $p(t)$ .

Bij random sequenties maken we daarenboven gebruik van

$$J_{\tau\tau} \cong \frac{2E_s}{N_0} \int_{-(K+1/2)T}^{+(K+1/2)T} \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \dot{p}(t-mT) \right|^2 dt \cong \frac{2E_s}{N_0} E \left[ \int_{-(K+1/2)T}^{+(K+1/2)T} \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \dot{p}(t-mT) \right|^2 dt \right]$$

Deze benadering is nauwkeurig voor sequenties die veel langer zijn dan de duur van  $\dot{p}(t)$ . Aldus bekomen we :

$$\begin{aligned} J_{\tau\tau} &\cong \frac{2E_s}{N_0} \int_{-(K+1/2)T}^{+(K+1/2)T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\dot{p}(t-mT)|^2 dt = \frac{2E_s}{N_0} (2K+1) \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\dot{p}(t-mT)|^2 dt \\ &= \frac{2E_s}{N_0} (2K+1) \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{p}(t)|^2 dt = \frac{2E_s}{N_0} (2K+1) E_{\dot{p}} \end{aligned}$$

waarbij  $E_{\dot{p}}$  de energie van de afgeleide puls  $\dot{p}(t)$  voorstelt.

Voor een trainingsequentie met identieke symbolen geldt :

$$J_{\tau\tau} \cong \frac{2E_s}{N_0} \int_{-(K+1/2)T}^{+(K+1/2)T} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{p}(t-mT) \right|^2 dt$$

De functie  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t-mT)$  is periodisch in  $t$  met periode  $T$ , en kan dus geschreven worden als een Fourierreeks. In de onderstelling dat de bandbreedte  $B$  van  $p(t)$  ligt tussen  $1/(2T)$  en  $1/T$ , bestaat de Fourierreeks enkel uit de constante term. Hieruit volgt dat  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{p}(t-mT)$ , de afgeleide van  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t-mT)$ , gelijk is aan nul, zodat  $J_{\tau\tau} = 0$ .

Voor een trainingsequentie met alternerende symbolen geldt :

$$J_{\tau\tau} \cong \frac{2E_s}{N_0} \int_{-(K+1/2)T}^{+(K+1/2)T} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \dot{p}(t-mT) \right|^2 dt$$

De functie  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m p(t-mT)$  is periodisch in  $t$  met periode  $2T$ , en kan dus geschreven worden als een Fourierreeks. In de onderstelling dat de bandbreedte  $B$  van  $p(t)$  ligt tussen  $1/(2T)$  en  $1/T$ , bestaat de Fourierreeks enkel uit de constante term en de termen met frequenties  $1/(2T)$  en  $-1/(2T)$  :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m p(t-mT) = C_0 + C_1 \exp(j\pi t/T) + C_{-1} \exp(-j\pi t/T), \text{ waarbij}$$

$$C_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{m=-\infty}^{\infty} (p(t-2mT) - p(t-2mT-T)) \exp(-j\pi n t/T) dt = \frac{1}{2T} P\left(\frac{n}{2T}\right) (1 - (-1)^n)$$

Merk op dat  $C_0 = 0$ . De afgeleide  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \dot{p}(t-mT)$  is dan gegeven door

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \dot{p}(t-mT) &= (j\pi/T) C_1 \exp(j\pi t/T) + (-j\pi/T) C_{-1} \exp(-j\pi t/T) \\ &= (j\pi/T^2) P(1/(2T)) \exp(j\pi t/T) + (-j\pi/T^2) P(-1/(2T)) \exp(-j\pi t/T) \end{aligned}$$

zodat

$$J_{\tau\tau} = \frac{2E_s}{N_0} (2K+1) \frac{\pi^2}{T^3} \left( |P(1/(2T))|^2 + |P(-1/(2T))|^2 \right)$$

Als we aannemen dat er geen ISI optreedt na het matched filter, voldoet  $P(f)$  aan

$$\frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |P(f - i/T)|^2 = 1, \text{ zodat } J_{\tau\tau} = \frac{2E_s}{N_0} (2K+1) \frac{\pi^2}{T^2}$$

De vergelijking van de bovenstaande resultaten leidt tot het volgende besluit. Wanneer de bandbreedte  $B$  van de zenderpuls  $p(t)$  gelegen is tussen  $1/(2T)$  en  $1/T$ , is een trainingsequentie met identieke symbolen helemaal niet geschikt om de timing te schatten, omdat het uitgezonden signaal nagenoeg constant is. Daarentegen leidt een trainingsequentie met alternerende symbolen tot een nagenoeg periodisch uitgezonden signaal met periode  $2T$ ; uit een dergelijk signaal kan de timing wel afgeleid worden, maar er treedt een 'dubbelzinnigheid' (ambiguity) op : de timing kan enkel bepaald worden op een veelvoud van  $2T$  na. Wanneer een random trainingsequentie wordt gebruikt, is er geen dubbelzinnigheid m.b.t. de timing, maar de schatting van de timing is minder nauwkeurig : bij een random trainingsequentie is de waarde van  $J_{\tau\tau}$  kleiner (met een factor 2 tot 3) dan bij een alternerende sequentie.

Fig. 3 toont het verloop van de te maximaliseren functie  $L(\hat{\tau})$  bij afwezigheid van ruis, voor een random trainingsequentie, een trainingsequentie met identieke symbolen, en een trainingsequentie met alternerende symbolen. Bij de berekening van deze functie hebben we gebruik gemaakt van de volgende benadering :

$$L(\hat{\tau}) \cong \text{Re} \left[ \sum_{m=-K}^K a_m^* \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(mT - nT + \varepsilon_{\tau}) \right]$$

waarbij  $g(t)$  de puls aan de uitgang van het matched filter voorstelt, en we voor de eenvoud  $E_s = 1$  hebben gesteld. In de onderstelling dat  $g(t)$  reël is, bandbeperkt met  $1/(2T) < B < 1/T$ , en  $g(mT) = \delta_m$ , bekommen we

$$L(\hat{\tau}) = \begin{cases} (2K+1) & \text{identieke symbolen} \\ (2K+1) \cos(\pi\varepsilon_{\tau}/T) & \text{alternerende symbolen} \\ (2K+1)g(\varepsilon_{\tau}) & \text{random symbolen} \end{cases}$$

Een trainingsequentie met identieke symbolen leidt tot een slechte performantie ( $L(\hat{\tau})$  is constant). Zijn de trainingsymbolen alternerend, dan is er een dubbelzinnigheid van  $2T$  ( $L(\hat{\tau})$  is periodisch met periode  $2T$ ). Bij random symbolen is er geen dubbelzinnigheid, maar het maximum is minder scherp dan bij alternerende symbolen.

## Appendix : de Schwarz-ongelijkheid

Beschouw twee complexe signalen  $x(t)$  en  $y(t)$ . Voor alle  $\beta$  geldt :

$$\int |x(t) + \beta y(t)|^2 dt \geq 0$$

Stellen we  $A_{xx} = \int |x(t)|^2 dt$   $A_{xy} = \int x(t)y^*(t)dt$   $A_{yy} = \int |y(t)|^2 dt$   
dan kan bovenstaande uitdrukking omgevormd worden tot

$$A_{xx} + \beta^* A_{xy} + \beta A_{xy}^* + |\beta|^2 A_{yy} \geq 0$$

De Schwarz-ongelijkheid komt voor in twee versies :

1) Stel  $\beta = \frac{-A_{xy}}{A_{yy}}$ , dan bekomen we  $A_{xx} - \frac{|A_{xy}|^2}{A_{yy}} \geq 0$  of  $A_{xx}A_{yy} \geq |A_{xy}|^2$ . Gelijkheid treedt op wanneer  $y(t) = Kx(t)$ , waarbij  $K$  een willekeurige *complexe* constante voorstelt.

2) Stel  $\beta = \frac{-\text{Re}[A_{xy}]}{A_{yy}}$ , dan bekomen we  $A_{xx} - \frac{(\text{Re}[A_{xy}])^2}{A_{yy}} \geq 0$  of  $A_{xx}A_{yy} \geq (\text{Re}[A_{xy}])^2$ . Gelijkheid treedt op wanneer  $y(t) = Kx(t)$ , waarbij  $K$  een willekeurige *reële* constante voorstelt. Merk op dat in geval van gelijkheid  $A_{xy}$  reëel is, zodat  $(\text{Re}[A_{xy}])^2 = |A_{xy}|^2$ .

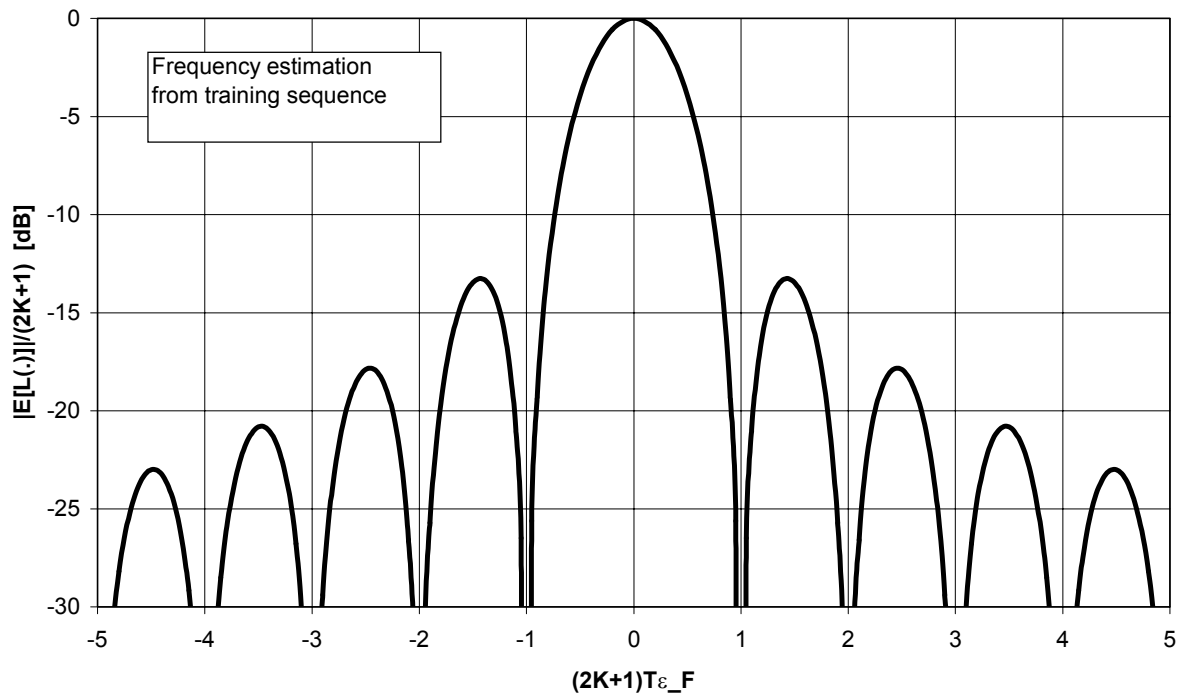


Fig. 1 : te maximaliseren functie bij frequentieschatting

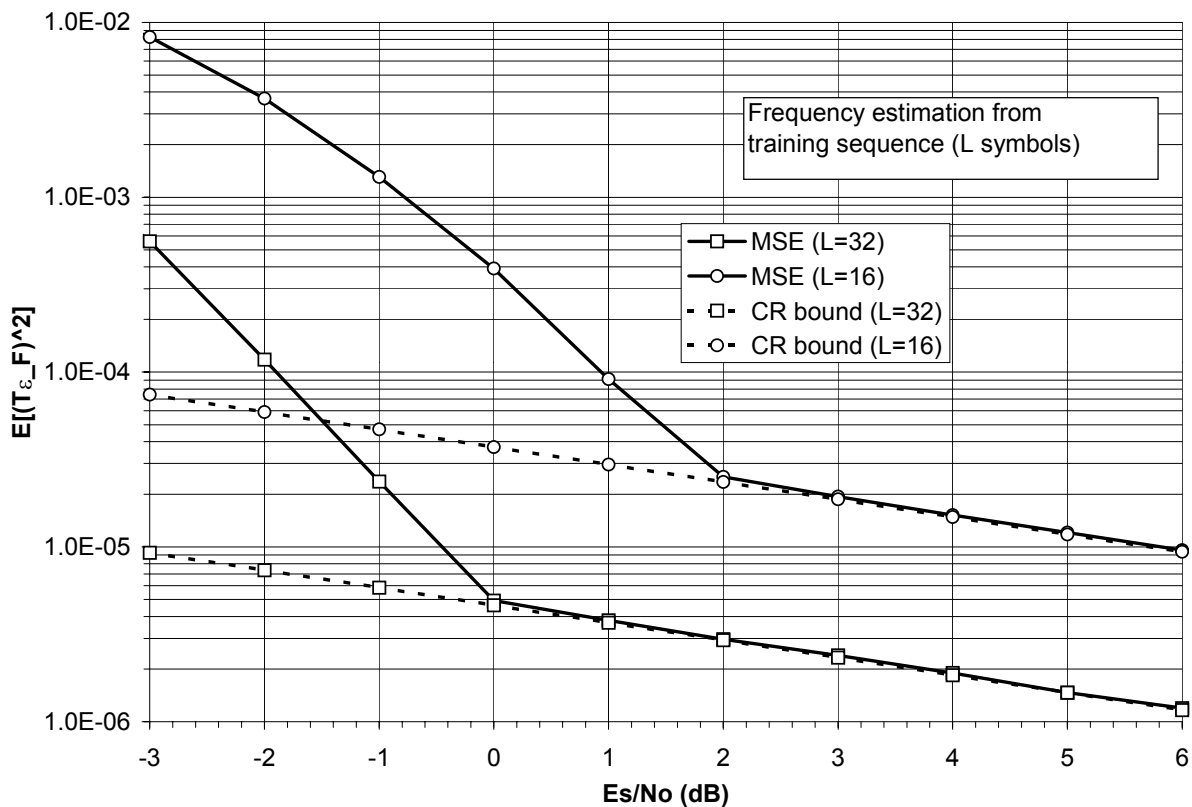


Fig. 2 : gemiddelde kwadratische schattingsfout bij frequentieschatting

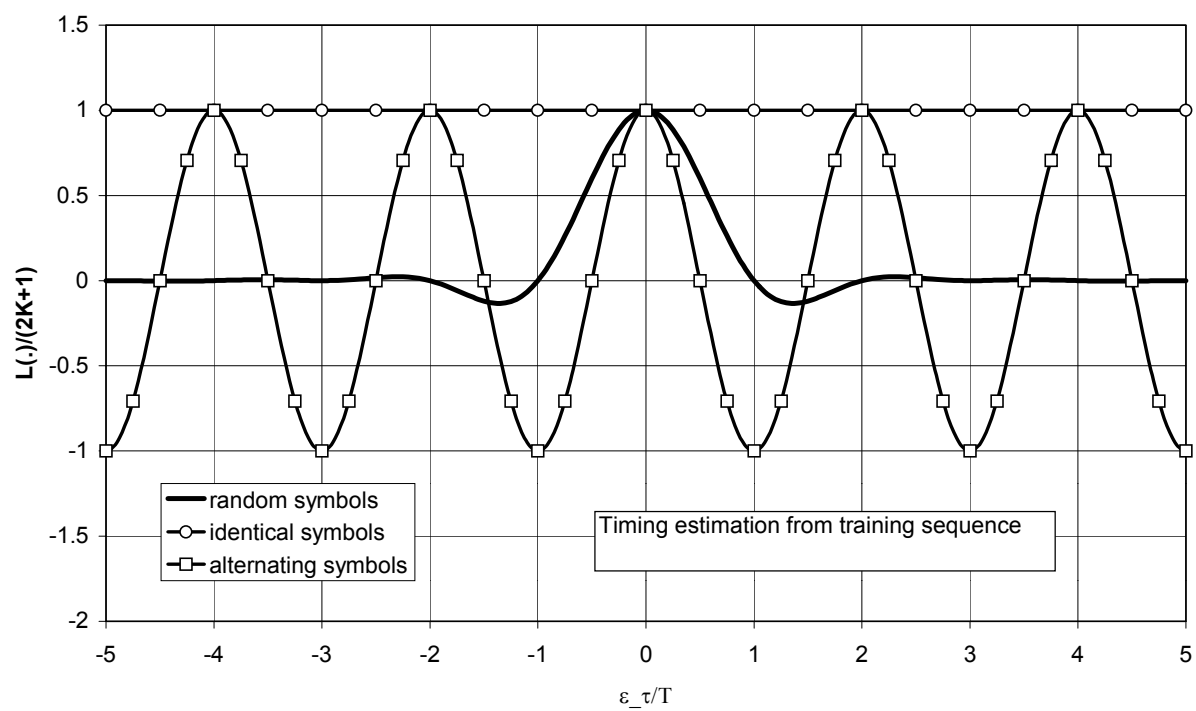


Fig. 3 : te maximaliseren functie bij schatting van de timing