Optimale egalisatie

Ontvangen signaal : $r(t) = \sum_m a_m p(t-mT) + w(t)$

Lineaire egalisatie

Ontvangen signaal r(t) aanleggen aan lineair egalisatiefilter h(t) en bemonsteren op t = kT leidt tot z_k, op basis waarvan het symbool a_k wordt gedetecteerd :

$$z_k = \int h(t)r(kT-t)dt = a_k \int h(t)p(-t)dt + \sum_{m\neq 0} a_{k-m} \int h(t)p(mT-t)dt + \int h(t)w(kT-t)dt$$

$$= a_k \mathbf{h}^T \mathbf{p}_0 + \sum_{m\neq 0} a_{k-m} \mathbf{h}^T \mathbf{p}_m + \mathbf{h}^T \mathbf{w}_k$$

waarbij $\mathbf{h}$, $\mathbf{p}_m$ en $\mathbf{w}_k$ vectorvoorstellingen zijn van h(t), p(mT-t) en w(kT-t). De variantie van de ruisterm in z_k is evenredig met $|\mathbf{h}|^2$.

Optimale lineaire egalisate : $\mathbf{h}$ minimaliseert $|\mathbf{h}|^2$ onder de restrictie dat er geen ISI optreedt en de coëfficiënt van a_k gelijk is aan 1 : $\mathbf{h}^T \mathbf{p}_m = \delta_m$ voor alle m.

Oplossing : invoeren van (reële) Lagrange-vermenigvuldigers λ_m en μ_m :

$$\min\left(\mathbf{h}^H \mathbf{h} - 2\sum_m \lambda_m \, \mathrm{Re}[\mathbf{h}^T \mathbf{p}_m] - 2\sum_m \mu_m \, \mathrm{Im}[\mathbf{h}^T \mathbf{p}_m] \right) \Rightarrow \mathbf{h} = \sum_m \underbrace{(\lambda_m + j\mu_m)}_{c_m} \mathbf{p}_m^* = \sum_m c_m \mathbf{p}_m^*$$

$$\Rightarrow z_k = \int h(t)r(kT-t)dt = \sum_m c_m \int p^*(mT-t)r(kT-t)dt = \sum_m c_m \int p^*(-t)r(kT-mT-t)dt \; :$$

z_k is lineaire combinatie van monsterwaarden aan de uitgang van het matched filter (impulsantwoord p*(-t)).

$\{c_m\}$ bepalen zodat aan de restricties is voldaan :

$$\delta_m = \mathbf{h}^T \mathbf{p}_m = \sum_n c_n \mathbf{p}_n^H \mathbf{p}_m = \sum_n c_n \int p^*(nT-t)p(mT-t)dt = \sum_n c_n g_{rec}(mT-nT)$$

Omzetten naar frequentiedomein : $1 = C(\exp(j2\pi fT)) G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT))$

$$\Rightarrow C(\exp(j2\pi fT)) = \frac{1}{G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT))} = \frac{1}{\frac{1}{T}\sum_k \left| P\left(f - \frac{k}{T}\right)\right|^2}$$

Performantie :

$$\mathbf{h}^H \mathbf{h} = \sum_{m,n} (c_m^* \mathbf{p}_m^T \mathbf{p}_n^*) c_n = \sum_{m,n} \delta_n c_n = c_0 = T \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} \frac{1}{G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT))} df$$

Decision-feedback egalisatie

We maken gebruik van een forward egalisatiefilter h(t) en een feedback egalisatiefilter H_{FB}(expj2πfT)), met $H_{FB}(\exp(j2\pi fT)) = \sum_{m>0} g(mT)\exp(-j2\pi fT)$, om symbool a_k te detecteren uitgaande van z_k, gegeven door :

$z_k = \int h(t)r(kT-t)dt = \mathbf{h}^T\mathbf{r}_k = a_k\mathbf{h}^T\mathbf{p}_0 + \sum_{m\neq 0} a_{k-m}\mathbf{h}^T\mathbf{p}_m + \mathbf{h}^T\mathbf{w}$. De ingang van de decisie-eenheid is gegeven door

$$z_k - \sum_{m>0} g(mT)a_{k-m} = a_k\mathbf{h}^T\mathbf{p}_0 + \sum_{m<0} a_{k-m}\mathbf{h}^T\mathbf{p}_m + \sum_{m>0} a_{k-m}(\mathbf{h}^T\mathbf{p}_m - g(mT)) + \mathbf{h}_k^T\mathbf{w}$$

Optimale egalisate :
1) Kies g(mT) = $\mathbf{h}^T\mathbf{p}_m$, zodat er geen postcursor ISI optreedt aan de ingang van de decisie-eenheid;
2) h minimaliseert $|\mathbf{h}|^2$ onder de restrictie dat de coëfficiënt van a_k gelijk is aan 1, en dat er geen precursor ISI optreedt in z_k : $\mathbf{h}^T\mathbf{p}_m = \delta_m$ voor m ≤ 0.
Oplossing : invoeren van (reële) Lagrange-vermenigvuldigers λ_m en μ_m :

$$\min\left(\mathbf{h}^H\mathbf{h} - 2\sum_{m\leq 0}\lambda_m \,\mathrm{Re}[\mathbf{h}^T\mathbf{p}_m] - 2\sum_{m\leq 0}\mu_m \,\mathrm{Im}[\mathbf{h}^T\mathbf{p}_m]\right) \Rightarrow \mathbf{h} = \sum_{m\leq 0}(\lambda_m + j\mu_m)\mathbf{p}_m^* = \sum_{m\leq 0} c_m\mathbf{p}_m^*$$

$$\Rightarrow z_k = \int h(t)r(kT-t)dt = \sum_{m\leq 0} c_m \int p^*(mT-t)r(kT-t)dt = \sum_{m\leq 0} c_m \int p^*(-t)r(kT-mT-t)dt :$$

z_k is lineaire combinatie van de monsterwaarden aan de uitgang van het matched filter (impulsantwoord p*(-t)). Merk op dat de coëfficiënten $\{c_m\}$ een anticausaal filter bepalen.

$\{c_m\}$ bepalen zodat aan restricties is voldaan :

$$\mathbf{h}^T\mathbf{p}_m = \sum_n c_n\mathbf{p}_n^H\mathbf{p}_m = \sum_n c_n \int p^*(nT-t)p(mT-t)dt = \sum_n c_n g_{rec}(mT-nT)$$

$$1 + \sum_{m>0} g(mT)\exp(-j2\pi fT) = C(\exp(j2\pi fT))G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT))$$

$$\Rightarrow G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT)) = \frac{1 + \sum_{m>0} g(mT)\exp(-j2\pi fT)}{C(\exp(j2\pi fT))}$$

Spectrale factorisatie van $G_{rec,fld}$(exp(j2πfT)) leidt tot
$G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT)) = A\,|\,H_c(\exp(j2\pi fT))\,|^2$, waarbij H_c(exp(j2πfT)) = 1 + h_c(T)exp(-j2πfT) + h_c(2T)exp(-j4πfT) + ... de transferfunctie is van een causaal filter, terwijl $H_c^*(\exp(j2\pi fT))$ de transferfunctie is van een anticausaal filter. Het feedback en feedforward filter van de egalisator zijn dan bepaald door :

$$\sum_{m>0} g(mT)\exp(-j2\pi fmT) = H_c(\exp(j2\pi fT)) - 1 \text{ en } C(\exp(j2\pi fT)) = \frac{1}{A\ H_c^*(\exp(j2\pi fT))}$$

Opdat het causale feedbackfilter zou stabiel zijn, moet H_c(z) de polen bevatten van $G_{rec,fld}$(z) die binnen de eenheidscirkel gelegen zijn (de overige polen worden bijgevolg toegekend aan $H_c^*(1/z^*)$). Opdat de anticausale C(z) zou stabiel zijn, moet $H_c^*(1/z^*)$ de nullen bevatten van $G_{rec,fld}$(z) die buiten de eenheidscirkel gelegen zijn (de overige nullen worden bijgevolg toegekend aan H_c(z)).

Performantie

$$\mathbf{h}^H\mathbf{h} = \sum_{m,n} c_m^* c_n \mathbf{p}_m^T \mathbf{p}_n^* = \sum_{m,n} c_m^* c_n \int p(mT-t)p^*(nT-t)dt = \sum_{m,n} c_m^* c_n g_{rec}(mT-nT)$$
$$= T\int_{\frac{-1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |C(\exp(j2\pi fT)|^2\ G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT))df$$

Het bovenstaand integrandum is evenredig met het vermogenspectrum van de ruis (in discrete tijd) aan de uitgang van het feedforward egalisatiefilter. Dit integrandum is gegeven door

$$|C(\exp(j2\pi fT)|^2\ G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT)) = \frac{1}{A^2\ |H_c(\exp(j2\pi fT))|^2}\cdot A\,|H_c(\exp(j2\pi fT))|^2 = \frac{1}{A}$$

De ruiswaarden na het feedforward egalisatiefilter zijn dus wit : C(exp(j2πfT)) is bijgevolg een (anticausaal en inverteerbaar) witmakend filter. Uit de waarde van het integrandum volgt $\mathbf{h}^H\mathbf{h}$ = 1/A.

Laten we $\mathbf{h}^H\mathbf{h}$ uitdrukken in termen van $G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT))$. Hiertoe beschouwen we de Fourierreeks van de reële functie $\ln(G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT)))$:

$$\ln(G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT))) = \gamma_0 + \sum_{m>0}\gamma_m \exp(-j2\pi fmT) + \sum_{m>0}\gamma_m^* \exp(j2\pi fmT).$$ Hieruit volgt :

$$G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT)) = \exp(\gamma_0)\,|L(\exp(j2\pi fT)|^2$$, waarbij

$$L(\exp(j2\pi fT)) = \exp\left(\sum_{m>0}\gamma_m \exp(-j2\pi fmT)\right)$$

Merk op dat $\begin{pmatrix} L(\exp(j2\pi fT)) \\ L^*(\exp(j2\pi fT)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\text{negatieve machten van } \exp(j2\pi fT) \\ 1+\text{positieve machten van } \exp(j2\pi fT) \end{pmatrix}$, zodat identificatie met de spectrale decompositie van $G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT))$ leidt tot

$$H_c(\exp(j2\pi fT)) = L(\exp(j2\pi fT)) \qquad H_c^*(\exp(j2\pi fT)) = L^*(\exp(j2\pi fT)) \qquad A = \exp(\gamma_0)$$

Vermits γ_0 de constante term is in de Fourierreeks van $\ln(G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT)))$, en $\mathbf{h}^H\mathbf{h}$ = 1/A, bekomen we

$$\mathbf{h}^H\mathbf{h} = \exp\left(-T\int_{\frac{-1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \ln\big(G_{rec,fld}(\exp(j2\pi fT))\big)df\right)$$