Kansfunctie bij observatie van toevalsproces

Signaal in witte Gaussiaanse ruis

Ontvangen signaal : r(t) = s(t;I) + n(t)
n(t) : stationaire *witte* Gaussiaanse ruis met spectrale dichtheid $N_0/2$
I stelt de over te dragen informatie (hypothese, parameter) voor

Omzetten van proces r(t) naar een vector **r**, en vervolgens de kansfunctie p(**r**|I) bepalen

1) Stuur r(t) door ideaal laagdoorlaatfilter $\Pi_{LP}(f)$ met bandbreedte $1/(2T_s)$. Dit leidt tot

$r_{LP}(t) = s_{LP}(t;I) + n_{LP}(t)$

De autocorrelatiefunctie van $n_{LP}(t)$ is gegeven door

$$E[n_{LP}(t)n_{LP}(t+u)] = \frac{N_0}{2T_s}\cdot\frac{\sin(\pi u/T_s)}{\pi u/T_s}$$

2) Het signaal $r_{LP}(t)$ wordt bemonsterd aan snelheid $1/T_s$, zodat aan het bemonsterings-theorema van Shannon is voldaan. De bekomen monsterwaarden bevatten alle informatie van $r_{LP}(t)$, en vormen de componenten van de vector **r** : **r** = $(..., r_{LP}(-T_s), r_{LP}(0), r_{LP}(T_s), ...)^T$, met

$r_{LP}(kT_s) = s_{LP}(kT_s) + n_{LP}(kT_s)$

De monsterwaarden $n_{LP}(kT_s)$ zijn Gaussiaans en statistisch onafhankelijk met variantie $N_0/(2T_s)$. In plaats van p(**r**|I) zelf, bepalen we de kansverhouding p(**r**|I)/p(**r**| **s**=0), waarbij **s**=0 correspondeert met r(t) = n(t), en dus met $r_{LP}(kT_s) = n_{LP}(kT_s)$. Omdat p(**r**|**s**=0) een factor is die niet afhangt van de informatie I, heeft deze normalisatie geen invloed op de decisie- of schattingsregel die I probeert te bepalen uit **r**. De resulterende kansverhouding p(**r**|I)/p(**r**|**s**=0) is gegeven door

$$\frac{p(\mathbf{r}\,|\,I)}{p(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}=0)} = \lim_{M\to\infty}\frac{C_M\exp\left(\frac{-T_s}{N_0}\sum_{m=-M}^{M}\left(r_{LP}(mT_s)-s_{LP}(mT_s;I)\right)^2\right)}{C_M\exp\left(\frac{-T_s}{N_0}\sum_{m=-M}^{M}\left(r_{LP}(mT_s)\right)^2\right)}$$

$$=\exp\left(\frac{-T_s}{N_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(-2s_{LP}(mT_s;I)r_{LP}(mT_s)+s_{LP}^2(mT_s;I)\right)\right)$$

waarbij $C_M = \left(\pi N_0 T_s\right)^{-(2M+1)/2}$. Steunend op het bemonsteringstheorema en de stelling van Parceval bekomen we :

$$T_s\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(-2s_{LP}(mT_s;I)r_{LP}(mT_s)+s_{LP}^2(mT_s;I)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2s_{LP}(t;I)r_{LP}(t)+s_{LP}^2(t;I)\right)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2S_{LP}^*(f;I)R_{LP}(f)+\left|S_{LP}(f;I)\right|^2\right)df$$

Rekening houdend met $S^*_{LP}(f;I)R_{LP}(f) = S^*_{LP}(f;I)R(f)$, geldt

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2S^*_{LP}(f;I)R_{LP}(f) + \left|S_{LP}(f;I)\right|^2\right)df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2S^*_{LP}(f;I)R(f) + \left|S_{LP}(f;I)\right|^2\right)df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2s_{LP}(t;I)r(t) + s^2_{LP}(t;I)\right)dt$$

3) Tenslotte wordt T_s voldoende klein genomen, zodat $s_{LP}(t;I) = s(t;I)$. Wanneer s(t;I) bandbeperkt is, m.a.w. voor alle I geldt $S(f;I) = 0$ als $|f| > B$, dan volstaat het $1/T_s > 2B$ te kiezen. Wanneer s(t;I) niet bandbeperkt is, moet een limietovergang $T_s \to 0$ genomen worden. Een voldoende kleine T_s leidt dus tot

$$\frac{p(\mathbf{r}\,|\,I)}{p(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}=0)} = \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2s(t;I)r(t) + s^2(t;I)\right)dt\right)$$

Op een van I onafhankelijke factor na kunnen we stellen dat

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2s(t;I)r(t) + s^2(t;I)\right)dt\right)$$

of

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(r(t) - s(t;I)\right)^2 dt\right)$$

Wanneer s(t;I) bandbeperkt is, mag r(t) vervangen worden door $r_{LP}(t)$, die bekomen wordt door r(t) aan te leggen aan een (niet noodzakelijk ideaal !) laagdoorlaatfilter met versterking 1 binnen de bandbreedte van s(t;I). De kansfunctie kan dan ook bekomen worden (op een van I onafhankelijke factor na) uit monsterwaarden $r_{LP}(mT_s)$ en $s(mT_s)$, genomen aan snelheid $1/T_s$ (groter dan tweemaal de bandbreedte van het laagdoorlaatfilter), hetgeen interessant is bij een praktische implementatie :

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-T_s}{N_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(-2s(mT_s;I)r_{LP}(mT_s) + s^2(mT_s;I)\right)\right)$$

of

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-T_s}{N_0}\sum_{m=-M}^{M}\left(r_{LP}(mT_s) - s(mT_s;I)\right)^2\right)$$

Banddoorlaatsignaal in witte Gaussiaanse ruis

We noteren het uitgezonden en ontvangen signaal als $s_{BP}(t;I)$ en $r_{BP}(t)$, met $s_{BP}(t;I) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}[s(t;I)\exp(j2\pi f_0 t)]$ en $r_{BP}(t) = s_{BP}(t;I) + n(t)$, waarbij $s(t;I)$ de bandbeperkte complexe omhullende van $s_{BP}(t;I)$ voorstelt : $S(f;I) = 0$ voor $|f|>B$. Op een van I onafhankelijke factor na, is de kansfunctie gegeven door

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2s_{BP}(t;I)r_{BP}(t) + s_{BP}^2(t;I)\right)dt\right)$$

Er geldt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_{BP}(t;I)r_{BP}(t)dt = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2}\,s^*(t;I)\exp(-j2\pi f_0 t)r_{BP}(t)dt\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2}\,S^*(f;I)R_{BP}(f+f_0)df\right]$$

Enkel de frequentiecomponenten van $R(f+f_0)$ in (-B,B) dragen bij tot bovenstaande integraal, zodat $\sqrt{2}\,R_{BP}(f+f_0)$ mag vervangen worden door $R(f) = \sqrt{2}\,R_{BP}(f+f_0)\Pi_{LP}(f)$. De corresponderende r(t) wordt bekomen door $r_{BP}(t)$ te demoduleren, en stelt dus de complexe omhullende van $r_{BP}(t)$ voor (zie Fig. 1). Alzo bekomen we :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_{BP}(t;I)r_{BP}(t)dt = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} S^*(f;I)R(f)df\right] = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t;I)r(t)dt\right]\text{, en ook}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_{BP}^2(t;I)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|s^*(t;I)\right|^2 dt\text{, zodat (op van I onafhankelijke factor na)}$$

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2\,\mathrm{Re}[s^*(t;I)r(t)] + |s(t;I)|^2\right)dt\right)\text{, of}$$

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}|r(t) - s(t;I)|^2 dt\right)$$

Hetzelfde resultaat wordt bekomen door de kansfunctie te berekenen in het geval van twee ontvangen signalen $r_I(t)$ en $r_Q(t)$, die de in-fase en kwadratuurcomponenten van $r_{BP}(t)$ voorstellen :

$r_I(t) = s_I(t;I) + n_I(t)$ $\qquad r_Q(t) = s_Q(t;I) + n_Q(t)$,

waarbij $n_I(t)$ en $n_Q(t)$ statistisch onafhankelijke witte Gaussiaanse ruisprocessen zijn met spectrale dichtheid $N_0/2$. Stellen we $r(t) = r_I(t) + jr_Q(t)$ en $s(t;I) = s_I(t;I) + js_Q(t;I)$, dan geldt

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left((r_I(t) - s_I(t;I))^2 + (r_{QI}(t) - s_Q(t;I))^2\right)dt\right) = \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}|r(t) - s(t;I)|^2 dt\right)$$

Ook hier kan de kansfunctie uitgedrukt worden in termen van de monsterwaarden van r(t) en s(t), genomen aan een snelheid $1/T_s > 2B$.

Signaal in gekleurde ruis

Als aanloop naar het geval van gekleurde ruis, tonen we eerst aan dat optimaliteit niet verloren gaat door een omkeerbare transformatie toe te passen op het ontvangen signaal.

We beschouwen drie ontvangers, waarvan de performantie gemeten wordt aan de hand van de kostfunctie C (hoe lager C, hoe beter de performantie).

- De eerste ontvanger minimaliseert de kost C over alle mogelijke ontvangers die r(t) observeren. Dit leidt tot $C = C_1$
- De tweede ontvanger transformeert eerst r(t) naar $\tilde{r}(t)$ met behulp van een omkeerbare transformatie T(.), en verwerkt vervolgens $\tilde{r}(t)$ zodat de kost C minimaal is over alle ontvangers die $\tilde{r}(t)$ observeren. Dit leidt tot $C = C_2$.
- De derde ontvanger transformeert eerst r(t) naar $\tilde{r}(t)$ via de transformatie T(.). Vervolgens wordt de inverse transformatie $T^{-1}(.)$ toegepast op $\tilde{r}(t)$, hetgeen resulteert in r(t). Tenslotte wordt r(t) verwerkt zodat de kost C minimaal is over alle ontvangers die r(t) observeren. Deze ontvanger is equivalent met de eerste ontvanger, en leidt dus tot $C = C_1$.

De tweede ontvanger kan niet beter zijn dan de eerste, zodat $C_1 \le C_2$. De derde ontvanger kan niet beter zijn dan de tweede, zodat $C_2 \le C_1$. Hieruit volgt dat $C_1 = C_2$, m.a.w. het (omkeerbar) transformeren van de observatie en de getransformeerde observatie optimaal verwerken leidt tot dezelfde performantie als het optimaal verwerken van de oorspronkelijke observatie. Dit is logisch, omdat er bij een omkeerbare transformatie geen informatie verloren gaat.

We zullen dit principe nu toepassen op het geval van gekleurde ruis : we zullen het ontvangen signaal (omkeerbaar) transformeren, zodat na transformatie de ruis wit is. We beschouwen het ontvangen signaal r(t), met

$$r(t) = s(t;I) + n(t)$$

waarbij n(t) stationaire Gaussiaanse gekleurde ruis is met vermogenspectrum $S_n(f)$. We sturen r(t) door een 'witmakend' filter met transferfunctie $H_w(f)$, hetgeen leidt tot

$$r_w(t) = s_w(t;I) + n_w(t)$$

waarbij het vermogenspectrum van $n_w(t)$ gelijk is aan $S_n(f)|H_w(f)|^2$. Kiezen we

$$|H_w(f)| = \frac{1}{\sqrt{S_n(f)}}$$

(en de fase van $H_w(f)$ willekeurig) dan is het vermogenspectrum van $n_w(t)$ gelijk aan 1. De inverse transformatie van $H_w(f)$ is een filter met transferfunctie $1/H_w(f)$. De kansfunctie $p(\mathbf{r}|I)$ wordt dan

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2s_w(t;I)r_w(t) + s_w^2(t;I)\right)dt\right)$$

of

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(r_w(t) - s_w(t;I)\right)^2 dt\right)$$

Gebruik makend van de stelling van Parceval bekomen we

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2s_w(t;I)r_w(t)+s_w^2(t;I)\right)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2S_w^*(f;I)R_w(f)+\left|S_w^2(f;I)\right|\right)df$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2S^*(f;I)R(f)+\left|S^2(f;I)\right|}{S_n(f)}df$$

Wanneer s(t;I) bandbeperkt is, m.a.w. S(f;I) = 0 als |f|>B, kan bij integratie over f het integratie-interval beperkt worden tot (-B,B). In dit geval zijn dus enkel de frequentie-componenten van $S_n(f)$ in (-B,B) van belang, zodat de voorwaarde $S_n(f)|H_w(f)|^2 = 1$ slechts voor f in (-B,B) moet voldaan zijn. Hieruit leiden we af dat er een witmakend filter bestaat op voorwaarde dat $S_n(f)$ nergens in (-B,B) nul wordt. In de praktijk is er echter steeds een (eventueel kleine) hoeveelheid witte (thermische) ruis aanwezig, waardoor $S_n(f) > 0$, en er steeds een witmakend filter kan gedefinieerd worden.

Door te steunen op de stelling van Parceval kunnen we nog twee alternatieve uitdrukkingen voor de kansfunctie afleiden :

$$p(\mathbf{r}\,|\,I)=\exp\left(\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2s(t;I)\tilde{r}(t)+s(t;I)\tilde{s}(t;I)\right)dt\right),\ \text{en}$$
$$p(\mathbf{r}\,|\,I)=\exp\left(\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2\tilde{s}(t;I)r(t)+s(t;I)\tilde{s}(t;I)\right)dt\right)$$

waarbij $\tilde{r}(t)$ en $\tilde{s}(t)$ worden bekomen door respectievelijk r(t) en s(t) aan te leggen aan een filter met transferfunctie $\tilde{H}(f)=1/S_n(f)$.

De kansfunctie kan eveneens bekomen worden aan de hand van de monsterwaarden van de door een laagdoorlaatfilter gestuurde signalen (zie Fig. 2) :

$$p(\mathbf{r}\,|\,I)=\exp\left(\frac{-T_s}{N_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(-2s_w(mT_s;I)r_{w,LP}(mT_s)+s_w^2(mT_s;I)\right)\right)$$
$$=\exp\left(\frac{-T_s}{N_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(-2s(mT_s;I)\tilde{r}_{LP}(mT_s)+s(mT_s;I)\tilde{s}(mT_s;I)\right)\right)$$
$$=\exp\left(\frac{-T_s}{N_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(-2\tilde{s}(mT_s;I)r_{LP}(mT_s)+s(mT_s;I)\tilde{s}(mT_s;I)\right)\right)$$

waarbij

$$r_{w,LP}(mT_s)=\int_{-\infty}^{+\infty}r_{LP}(mT_s-u)h_{w,LP}(u)du=T_s\sum_{i=-\infty}^{+\infty}r_{LP}(mT_s-iT_s)h_{w,LP}(iT_s)$$

en $h_{w,LP}(t)$ het impulsantwoord is van een filter met transferfunctie $H_w(f)\Pi_{LP}(f)$. Gelijkaardige uitdrukkingen gelden voor $s_w(mT_s;I)$, $\tilde{s}(mT_s;I)$ en $\tilde{r}_{LP}(mT_s)$, waaruit volgt dat de kansfunctie steeds kan berekend worden uit $\{r_{LP}(mT_s)\}$ en $\{s(mT_s;I)\}$.

Laten we nu het geval van een banddoorlaatsignaal in gekleurde ruis beschouwen :

$$r_{BP}(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}[s(t;I)\exp(j2\pi f_0 t] + n(t)$$

De kansfunctie is gegeven door

$$p(\mathbf{r}\,|\,I) = \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2\,\mathrm{Re}[s_w^*(t;I)r_w(t)] + |s_w(t;I)|^2\right)dt\right)$$
$$= \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathrm{Re}[-2s^*(t;I)\tilde{r}(t) + s^*(t;I)\tilde{s}(t;I)]\right)dt\right)$$
$$= \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathrm{Re}[-2\tilde{s}^*(t;I)r(t) + s^*(t;I)\tilde{s}(t;I)]\right)dt\right)$$

Hierbij zijn r(t), s(t;I), $r_w(t)$, $s_w(t;I)$, $\tilde{r}(t)$ en $\tilde{s}(t;I)$ de complexe omhullenden van respectievelijk $r_{BP}(t)$, $s_{BP}(t;I)$, $r_{BP,w}(t)$, $s_{BP,w}(t;I)$, $\tilde{r}_{BP}(t)$ en $\tilde{s}_{BP}(t;I)$. De signalen $r_{BP,w}(t)$, $s_{BP,w}(t;I)$, $\tilde{r}_{BP}(t)$ en $\tilde{s}_{BP}(t;I)$ worden bekomen door $r_{BP}(t)$ en $s_{BP}(t;I)$ aan te leggen aan filters met transferfuncties $H_{BP,w}(f)$ en $\tilde{H}_{BP}(f)$, waarbij

$$|H_{BP,w}(f)| = \frac{1}{\sqrt{S_n(f)}} \qquad \tilde{H}_{BP}(f) = \frac{1}{S_n(f)}$$

Een alternatieve manier (geschikt voor praktische implementatie) om $r_w(t)$, $s_w(t;I)$, $\tilde{r}(t)$ en $\tilde{s}(t;I)$ te bekomen bestaat er in eerst $r_{BP}(t)$ en $s_{BP}(t;I)$ te demoduleren, hetgeen leidt tot de complexe omhullenden r(t) en s(t;I), en vervolgens deze omhullenden aan te leggen aan de complexe equivalente laagdoorlaatfilters $H_{eq,w}(f)$ en $\tilde{H}_{eq}(f)$ die corresponderen met $H_{BP,w}(f)$ en $\tilde{H}_{BP}(f)$:

$$H_{eq,w}(f) = H_{BP,w}(f+f_0)\Pi_{LP}(f) \qquad \tilde{H}_{eq}(f) = \tilde{H}_{BP}(f+f_0)\Pi_{LP}(f)$$

Uiteraard kan ook hier de kansfunctie uitgedrukt worden in termen van de monsterwaarden $r(mT_s)$, $s(mT_s;I)$, $r_w(mT_s)$, $s_w(mT_s;I)$, $\tilde{r}(mT_s)$ en $\tilde{s}(mT_s;I)$; de monsterwaarden $r_w(mT_s)$, $s_w(mT_s;I)$, $\tilde{r}(mT_s)$ en $\tilde{s}(mT_s;I)$ kunnen op hun beurt berekend worden uit de monsterwaarden $r(mT_s)$ en $s(mT_s;I)$ (zie Fig. 3).

Opmerkingen

We hebben hierboven een stochastisch proces voorgesteld aan de hand van zijn monsterwaarden, genomen aan voldoende snelheid. Ook andere representaties zijn mogelijk, en leiden tot dezelfde uitdrukking van de kansfunctie in termen van r(t) en s(t;I). Het verband tussen een toevalsproces x(t) en zijn representatie **x** is :

$$x(t) = \sum_m x_m \phi_m(t) \qquad x_m = \int x(t)\phi_m(t)dt,$$

waarbij $\{\phi_m(t)\}$ een complete set orthognormale functies voorstelt. Representatie aan de hand van monsterwaarden correspondeert met de keuze $\phi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}}\cdot p(t - mT_s)$, waarbij $p(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$, wat leidt tot $x_m = \sqrt{T_s}\,x(mT_s)$.

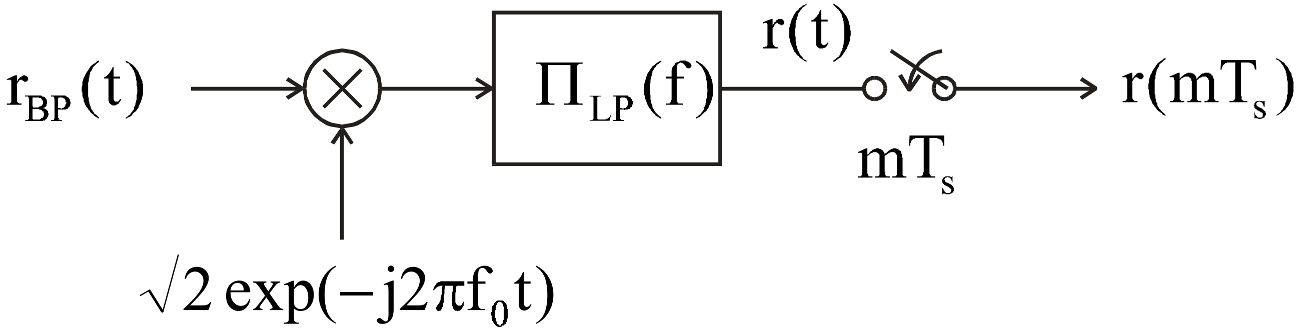

Fig. 1 : banddoorlaatsignaal in witte ruis : berekening van $r(mT_s)$

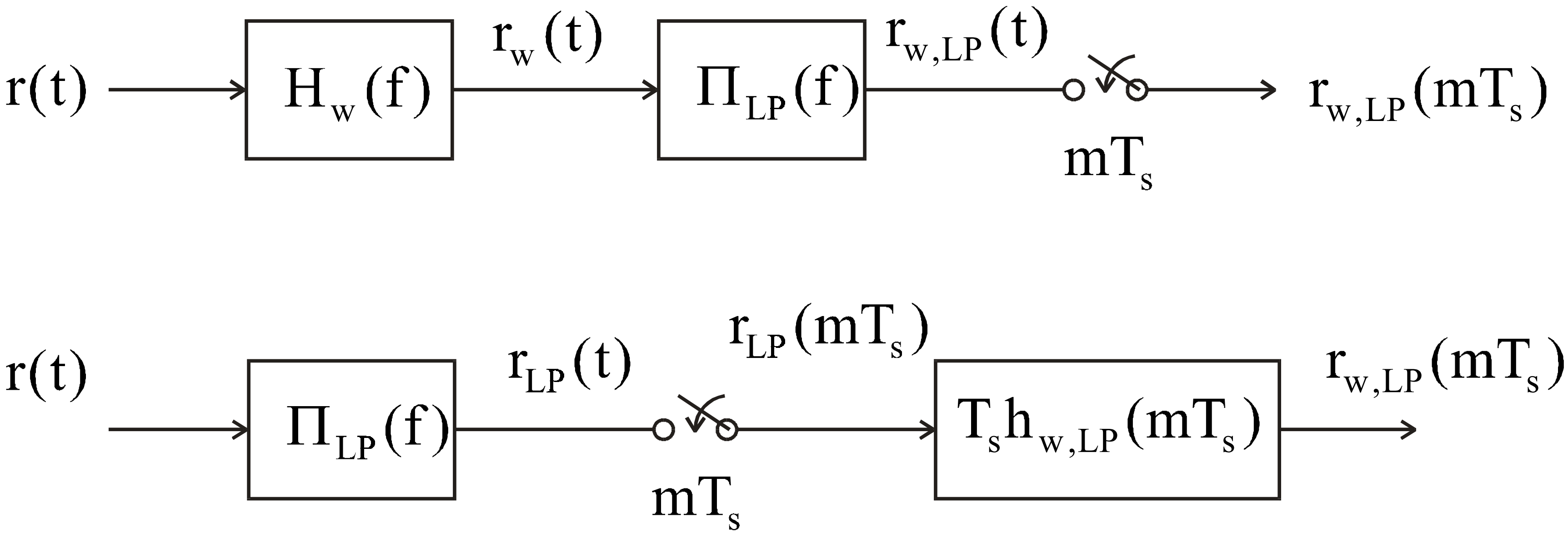

Fig. 2 : signaal in gekleurde ruis : twee berekeningswijzen voor $r_{w,LP}(mT_s)$

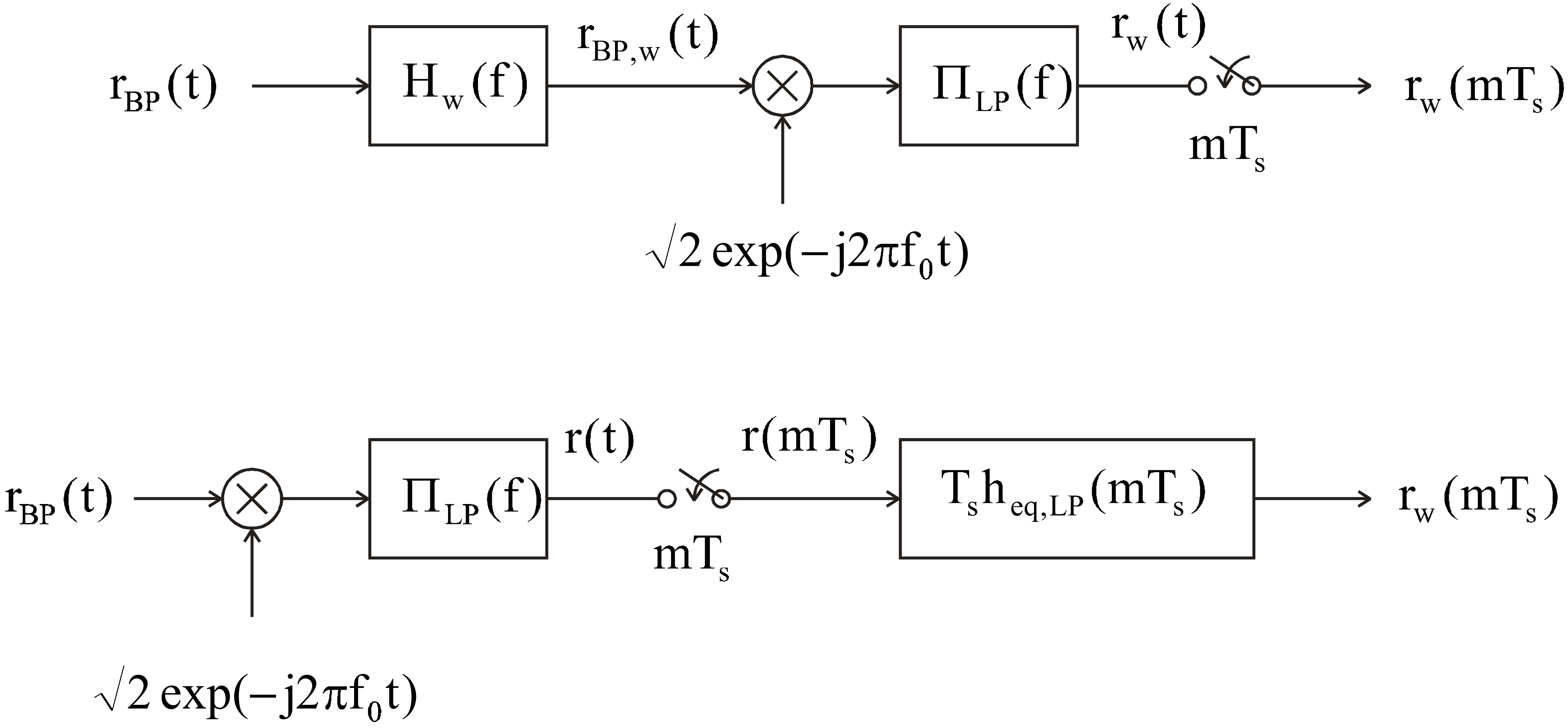

Fig. 3 : banddoorlaatsignaal in gekleurde ruis : twee berekeningswijzen voor $r_w(mT_s)$