Didactisch materiaal bij de cursus

Optimalisatietechnieken

http://telin.UGent.be/~philips/optimalisatie/

Academiejaar 2011-2012

Prof. dr. ir. W. Philips

philips@telin.UGent.be

Tel: 09/264.33.85 Fax: 09/264.42.95

UNIVERSITEIT GENT

Telecommunicatie en Informatieverwerking

Copyright notice

Prof. dr. ir. W. Philips
Department of Telecommunications and Information Processing
University of Gent
St.-Pietersnieuwstraat 41, B9000 Gent, Belgium

E-mail: philips@telin.UGent.be
Fax: 32-9-264.42.95
Tel: 32-9-264.33.85

Verzwaarde lineaire programma's

Theorie en voorbeelden

Verzwaarde lineaire programma's

Lineaire programma's

- hebben een stelsel van lineaire beperkingen: A en B en …

Verzwaarde lineaire programma's zijn essentieel lineaire programma's maar met bijkomende "lastige" beperkingen

Eerste soort van "lastige" beperkingen:

kan worden omgevormd worden tot "of"

- beperkingen van het "of"-type: (A en B) of C of …
- als-dan-beperkingen: als $x_j \leq u_j$ dan moet $x_k \leq u_k$

$\Rightarrow$ We proberen deze te vervangen door lineaire beperkingen

Tweede soort van "lastige" beperkingen:

- alle variabelen moeten geheel of binair zijn: "integer programming" of "zero-one programming"
- alles of niets beperkingen: x_j=0 of x_j=u_j
- sommige variabelen moeten geheel of binair zijn: "mixed integer programming" of "mixed zero-one programming"

Voorbeeld 1: “Swedish Steel”...

Staal bestaat uit ijzer met een aantal additieven

Elk bestanddeel mag niet te veel noch te weinig voorkomen

- koolstof: 0.65% tot 0.75%; nikkel: 3% tot 3.5%
- chroom: 1% tot 1.2%; molybdeen: 1.1% tot 1.3%

Men gebruikt bij voorkeur schroot als grondstof en vult waar nodig aan met duurdere zuivere additieven

Men heeft b.v. keuze uit 4 soorten schroot

- elk soort schroot heeft een verschillende samenstelling
- van twee soorten schroot is er maar een beperkte hoeveelheid (75 kg en 250 kg) voorradig
- men moet elk van deze twee soorten ofwel volledig opgebruiken ofwel helemaal niet gebruiken

Zoek de goedkoopste oplossing om 1000 kg staal te maken

...Voorbeeld 1: “Swedish Steel”...

© Rardin, tabel 4.2

		Samenstelling (%)				Beschikbaar	Prijs
		Koolstof	Nikkel	Chroom	Molybdeen	(kg)	(kr/kg)
x_1	Schroot 1	0.8	1.8	12		75	16
	Schroot 2	0.7	3.2	1.1	0.1	250	10
⋮	Schroot 3	0.85				onbeperkt	8
	Schroot 4	0.4				onbeperkt	9
	Nikkel		100			onbeperkt	48
	Chroom			100		onbeperkt	60
x_7	Molibdeen				100	onbeperkt	53
	Minimum	0.65	3	1	1.1	gewenste samenstelling (%)	
	Maximum	0.75	3.5	1.2	1.3		

Beperkingen:
- Minimum en maximum samenstelling mengsel
- Beschikbare hoeveelheden
- Totaal gewicht (1000 kg)

Kostfunctie: totale prijs van het mengsel

...Voorbeeld 1: “Swedish Steel”

Dit is een grotendeels lineair programma

Noem x_j de hoeveelheid van bestanddeel j (schroot of additief)

Beperkingen:

- gewenste hoeveelheid: $T \stackrel{\Delta}{=} \sum_{j=1}^{7} x_j = 1000$
- koolstof: $0.65\ T \le 0.8\ x_1 + 0.7\ x_2 + 0.85\ x_3 + 0.4\ x_4 \le 0.75\ T$
- nikkel: $3\ T \le 1.8\ x_1 + 3.2\ x_2 + 100\ x_5 \le 3.5\ T$
- …
- alle x_j niet-negatief

Te minimaliseren: de kostprijs

$$16\ x_1 + 10\ x_2 + 8\ x_3 + 9\ x_4 + 48\ x_5 + 60\ x_6 + 53\ x_7$$

En nu nog de alles-of-niets voorwaarden:

- $x_1 = 75\ y_1$ en $x_2 = 250\ y_2$ met $y_1, y_2 = 0,1$

Besluit: lineair programma met twee binaire variabelen

Voorbeeld 2: Productieprobleem...

Productiekosten zijn dikwijls van de vorm $\mu(x)\ f + c\ x$ met $\mu(x)=0$ als $x=0$ en $\mu(x)=1$ als $x > 0$

- geproduceerde hoeveelheid: x
- opstartkost: f, marginale productiekost: $c\,x$ (en $c > 0$)

$\Rightarrow$niet-lineaire kostfunctie!

Modellering met lineaire kostfunctie:

- definieer binaire y: $y=1$ als er geproduceerd wordt
- de kost wordt dan: $f\,y + c\ x$
- extra beperking: A: $x = 0 \Leftrightarrow y=0$

We vervangen de als-dan beperking A door de lineaire beperking B: $x \le uy$ met u een bovengrens voor elke mogelijke x

Onderliggende idee:

- als $y=0$ dan wordt x op nul geforceerd door B: $x \le uy$
- als $y=1$ dan wordt B: $x \le u$ en mag dus $x \ne 0$

...Voorbeeld 2: Productieprobleem

Zijn de twee beperkingen werkelijk equivalent?

- A: $x = 0 \Leftrightarrow y=0$
- B: $x \leq uy$ met u een bovengrens voor elke mogelijke x

Mogelijke oplossingen:

- A: $x = 0$ en $y= 0$; $x > 0$ en $y=1$;
- B: $x = 0$ en $y= 0$; $\cancel{u \geq}\, x \geq 0$ en $y=1$

geen echte beperking als u voldoende groot is

Probleem: $x=0$, $y=1$ is ook een oplossing

$\Rightarrow$ voorwaarde B is minder beperkend dan A

In een realistisch kostminimalisatieprobleem geeft dit niet:

- $x=0$, $y=1$: productie opstarten en toch niets produceren
- $x=0$, $y=1$ is altijd een duurdere oplossing dan $x=0$, $y=0$ en zal dus nooit als optimale oplossing worden gekozen

Besluit: men mag altijd mogelijke oplossingen toevoegen op voorwaarde dat deze niet optimaal kunnen zijn

Voorbeeld 3: Budgetteringsproblemen...

Gegeven

- een aantal mogelijke projecten met een gekende kost en opbrengst
- een maximaal budget (eventueel gespreid in de tijd)

Beslis welke projecten we moeten uitvoeren

- om een maximale opbrengst te krijgen
- zonder het toegelaten budget te overschrijden

Dit is in essentie een knapzakprobleem

Meestal zijn er echter bijkomende als-dan-beperkingen

- sommige projecten gebruiken de resultaten van andere: b.v.: als we project A kiezen dan moeten we ook B kiezen
- sommige projecten zijn mutueel exclusief

...Voorbeeld 3: NASA mission plan...

© Rardin, tabel 11.2

j	Mission	budget requirements (billion $) 2000-2004	2005-2009	2010-2014	2015-2019	2020-2024	Value	Not with	Depends on
1	Communications satellite	6					200		
2	Oribital microwave	2	3				3		
3	Io lander	3	5				20		
4	Uranus orbiter 2017					10	50	5	3
5	Uranus orbiter 2000		5	8			70	4	3
6	Mercury probe			1	8	4	20		3
7	Saturn probe	1	8				5		3
8	Infrared imaging				5		10	11	
9	Ground-based SETI	4	5				200	14	
10	Large orbital structures		8	4			150		
11	Color imaging			2	7		18	8	2
12	Medical technology	5	7				8		
13	Polar orbital platform		1	4	1	1	300		
14	Geosynchronous SETI		4	5	3	3	185	9	
	Budget	10	12	14	14	14			

$j=11$ hangt af van $j=2$

$j=8$, 11: incompatibele technologieën $\Rightarrow$ mutueel exclusief

$j=4$, 5: zelfde project, andere startdatum $\Rightarrow$ mutueel exclusief

...Voorbeeld 3: Modellering...

Modellering:

- definieer binaire beslissingsvariabelen x_j: $x_j=1$ als project j wordt gekozen
- Projecten $1\ldots n$ mutueel exclusief $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1$
- project j vereist $i \Leftrightarrow x_j \leq x_i$

Besluit:

- ingewikkelde als-dan-beperkingen kunnen weer worden vervangen door eenvoudige lineaire beperkingen
- resultaat: lineair programma met enkele binaire variabelen

De lineaire modellering is niet uniek: b.v. 1,2,3 mutueel exclusief

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$

let op: enkel voor alle x_j binair!

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq 1$ en $x_1 + x_3 \leq 1$ en $x_2 + x_3 \leq 1$

Een goede keuze kan de oplossing sterk vereenvoudigen

Nasa: modellering

Maximaliseer $200x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 70x_5 + 20x_6 + 5x_7 + 10x_8 + 200x_9 + 150x_{10} + 18x_{11} + 8x_{12} + 300x_{13} + 185x_{14}$ mits

$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_7 + 4x_9 + 5x_{12} \le 10$ (2000 tot 2004)

$3x_2 + 5x_3 + 5x_5 + 8x_7 + 5x_9 + 8x_{10} + 7x_{12} + x_{13} + 4x_{14} \le 12$ (2005 tot 2009)

$8x_5 + x_6 + 4x_{10} + 2x_{11} + 4x_{13} + 5x_{14} \le 14$ (2010 tot 2014)

$8x_6 + 5x_8 + 7x_{11} + x_{13} + 3x_{14} \le 14$ (2015 tot 2019)

$10x_4 + 4x_6 + x_{13} + 3x_{14} \le 14$ (2020 tot 2024)

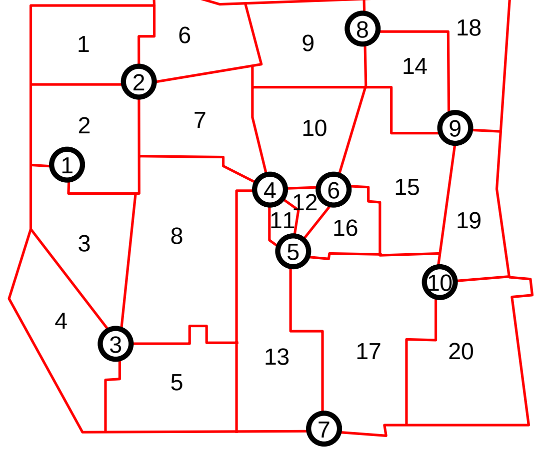
$x_4 + x_5 \le 1 \quad x_8 + x_{11} \le 1 \quad x_9 + x_{14} \le 1$ (mutueel exclusief)

$x_{11} \le x_2 \quad x_4 \le x_3 \quad x_5 \le x_3 \quad x_6 \le x_3 \quad x_7 \le x_3$ (afhankelijkheden)

alle $x_j = 0$ of $1 \Rightarrow$ zero-one programma

Voorbeeld 4: Austin EMS location

© Rardin, fig. 11.1



EMS =Emergency Medical Service =MUG

Austin, Texas:
districten: 1… 20

mogelijke locaties: 1… 10

x_i=1 als de i-de locatie wordt gekozen

Oefening: Stel zelf de ongelijkheden op

Een EMS kan alle aangrenzende districten bedienen: district 12 kan b.v. worden bediend door j=4, 5, en 6: $x_4 + x_5 + x_6 \ge 1$

Bedien alle districten met zo weinig mogelijk EMS-locaties

Bedekkingsproblemen...

Gegeven een aantal mogelijke plaatsen om MUG-stations in te planten

Elk station kan (enkel) de naburige districten "bedienen"

Kies de inplantingsplaatsen zodat

- elk district door minstens 1 station kan worden bediend
- en dit met zo weinig mogelijk stations

Definieer binaire x_j: x_j=1 als er een station op plaats j komt

Definieer J_i: de verzameling van stations die een bepaald district kunnen bedienen

$\Rightarrow$ voor elk district geldt een beperking van de vorm $\sum_{j \in J_i} x_j \ge 1$

Dit is een bedekkingsprobleem:

- Bedekkingsproblemen leggen voorwaarden op aan deelverzamelingen J_i van objecten
- Hier zijn de objecten de stations

…Verwante problemen…

Bedekkingsvoorwaarde ("set covering")

- minstens één punt van een verzameling J moet worden bedekt
- voorbeeld: minstens 1 EMS per district (J = EMS-stations)

Stapelvoorwaarde ("set packing")

- hoogstens één punt van een verzameling J mag worden bedekt (cfr. exclusiviteitsvoorwaarden)
- voorbeeld: maximaal 1 lokale radio per frequentie (J = radio's)

Partitioneringsvoorwaarde ("set partitioning")

- juist één punt van een verzameling J moet worden bedekt
- voorbeeld: juist één kiesbureau per kiezer (J = bureaus)

Bedekking: $\sum_{j \in J} x_j \ge 1$

"Packing": $\sum_{j \in J} x_j \le 1$

Partitionering: $\sum_{j \in J} x_j = 1$

…Verwante problemen

In het Austin EMS-probleem vraagt de optimale oplossing 6 stations; soms is dit teveel

⇒ realistischer, verwant probleem:

- bijkomende voorwaarde: gebruik maximaal n stations
- associeer een kost c_i aan elk niet bedekt district i
- minimaliseer de totale kost

Definieer binaire y_i: $y_i=1$ als district i niet wordt gedekt

⇒ De kost wordt: $\sum_{i=1}^{20} c_i y_i$

⇒ De bedekkingsvoorwaarden bevatten nu naast de "EMS-variabelen" x_j ook de districtsvariabelen y_i

oude voorwaarde: district 12 moet worden bedekt
$x_4+x_5+x_6 \geq 1$

⇒

nieuwe voorwaarde: indien 12 niet bedekt dan moet $y_{12}=1$
$x_4+x_5+x_6+y_{12} \geq 1$

Besluit: Verzwaarde lineaire programma's

Zijn essentieel lineaire programma's met een paar mogelijke complicaties:

- sommige variabelen moeten binair of geheel zijn
- niet-lineaire kostfunctie
  - ⇒ (soms) vervangen door lineaire kostfunctie, binaire variabelen en niet-lineaire beperkingen
- niet-lineaire beperkingen (b.v. "als-dan" beperkingen)
  - ⇒ vervangen door lineaire beperkingen en binaire variabelen

    Hierbij moet men dikwijls noodgedwongen extra mogelijke oplossingen toelaten; dit mag als men kan aantonen dat ze geen optimale kost hebben

Oplossing door volledige opsomming

Beschouw een lineair programma met een aantal binaire variabelen y_i en niet-binaire (reële) variabelen x_j

Volledige opsomming:

- hou de binaire y_i-variabelen vast en optimaliseer over de x_j-variabelen ⇒ "gewoon" lineair programma met oplossing $\mathbf{x}_{\text{opt}}(\mathbf{y})$ en optimale kost $c_{\text{opt}}(\mathbf{y})$
- doe dit voor alle mogelijke $\mathbf{y}$ en bepaal daarna $\mathbf{y}_{\text{opt}}$, de $\mathbf{y}$ waarvoor $c_{\text{opt}}(\mathbf{y})$ optimaal wordt
- de optimale oplossing is dan $\mathbf{y}=\mathbf{y}_{\text{opt}}$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{opt}}(\mathbf{y}_{\text{opt}})$

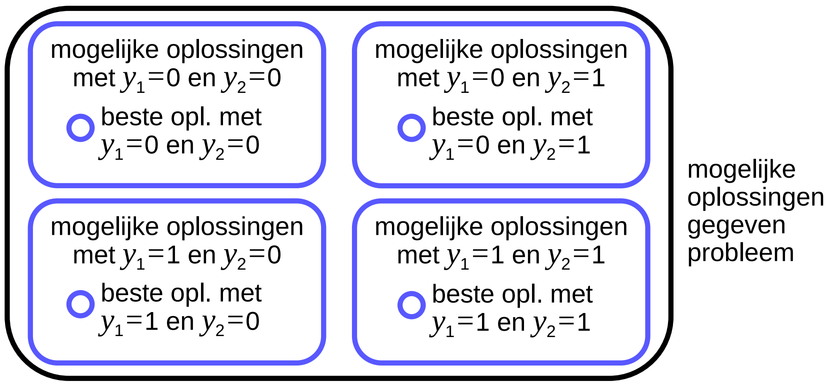
Probleem: aantal op te lossen lineaire programma's verdubbelt met elke bijkomende binaire variabele!

Besluit:

- volledige opsomming is een eenvoudige oplossingsmethode
- is enkel bruikbaar als er niet te veel binaire variabelen zijn

Oplossing door volledige opsomming

Stel dat er twee binaire veranderlijken zijn, n.l. y_1 en y_2 en nog enkele continue veranderlijken x_1, x_2, …



De beste onder de optimale oplossingen van de vier deelproblemen is ook de optimale oplossing van het origineel probleem

Voorbeeld 1: Swedish Steel

mogelijke y		Corresponderende optimale xj					kost
y1	y2	x3	x4	x5	x6	x7	
0	0	823.11	125.88	30.00	10.00	11.00	10340.8
0	1	646.66	63.33	22.00	7.25	10.75	10304.0
1	0	736.44	160.06	16.50	1.00	11.00	9967.1
1	1	561.56	94.19	8.50	0.00	10.75	10017.9

Optimum

Zeven continue variabelen $x_1 \ldots x_7$

Twee binaire variabelen t.g.v. twee alles-of-niets voorwaarden:

- $x_1=75y_1$ en $x_2=250y_2$ met $y_1, y_2=0,1$

2 binaire variabelen $y_1, y_2 \Rightarrow$ 4 lineaire programma's

- hierin liggen $x_1=75y_1$ en $x_2=250y_2$ onmiddellijk vast
- enkel de variabelen $x_3 \ldots x_7$ treden dus nog op

$\Rightarrow$ deze variabelen worden geoptimaliseerd met simplex

Relaxatie van de beperkingen...

Een stel beperkingen A is een relaxatie van een ander stel B als alle mogelijke oplossingen van B ook mogelijke oplossingen van A zijn

Voorbeelden:

- vervang $1.5x_1+4x_2 \leq 300$ door $1.5x_1+4x_2 \leq 600$ — slechte relaxatie
- laat een ongelijkheid weg
- laat toe dat binaire of gehele variabelen reëel worden

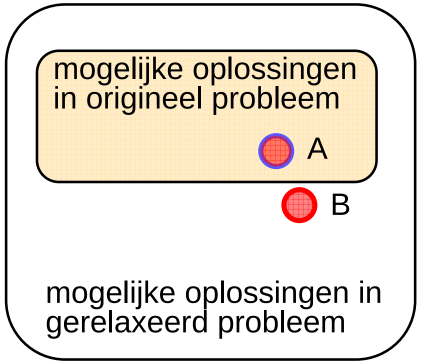
$\Rightarrow$ we krijgen een zuiver lineair programma

Relaxaties behouden bestaande oplossingen en laten extra oplossingen toe $\Rightarrow$ de optimum kost van het gerelaxeerd probleem is altijd beter dan die van het origineel probleem

Goede relaxaties vereenvoudigen het probleem

Sterke relaxaties zijn relaxaties waardoor de optimale kost van het probleem weinig verandert

Relaxatie van de beperkingen



optimale oplossing in origineel probleem

optimale oplossing in gerelaxeerd probleem (voor verschillende gevallen)

Relaxaties laten extra oplossingen toe en leiden dus altijd tot

- een even goed optimum
- of een beter optimum

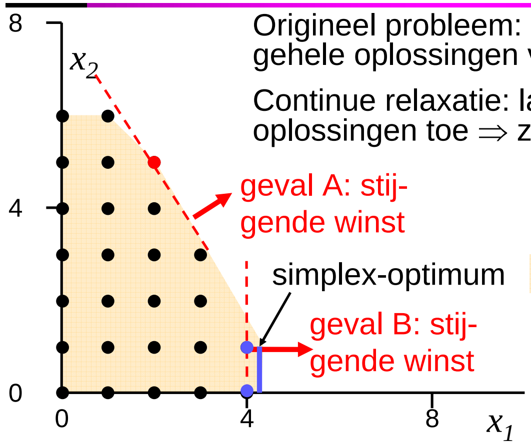
Als het optimum van het gerelaxeerd probleem ook mogelijk is in het origineel probleem $\Rightarrow$ dan is het gerelaxeerd optimum ook een optimum van het origineel probleem

Relaxaties zijn sterk als de optimale kost niet of niet veel verandert door de bijkomende oplossingen die ze toelaten

Voorbeeld: continue relaxatie

Origineel probleem: lineair programma, maar gehele oplossingen vereist

Continue relaxatie: laat ook niet-gehele oplossingen toe $\Rightarrow$ zuiver lineair programma



- mogelijke oplossing in origineel probleem
- mogelijke oplossing in gerelaxeerd probleem
- optimum in origineel probleem (geval A)
- optimum in origineel probleem (geval B)

Geval A: de oplossing in het gerelaxeerd probleem is toevallig geheel $\Rightarrow$ dit is ook de oplossing van het origineel probleem

Geval B: het gerelaxeerd probleem voegt betere oplossingen toe en geeft een bovengrens voor de originele optimale winst

Voorbeeld 1: Swedish Steel

mogelijke y		Corresponderende optimale xj					kost
y1	y2	x3	x4	x5	x6	x7	
0	0	823.11	125.88	30.00	10.00	11.00	10340.8
0	1	646.66	63.33	22.00	7.25	10.75	10304.0
1	0	736.44	160.06	16.50	1.00	11.00	9967.1
1	1	561.56	94.19	8.50	0.00	10.75	10017.9

Optimum

Optimale continue relaxatie							kost
y1	y2	x3	x4	x5	x6	x7	
1	0.45	672.28	137.31	13.59	0.00	10.91	9953.7

te opti-
mistisch

Continue relaxatie: $0 \le y_1, y_2 \le 1$ i.p.v. y_1, y_2 binair

- goede relaxatie want we krijgen nu een zuiver lineair programma dat snel en eenvoudig kan worden opgelost
- sterke relaxatie want de optimale kost verandert niet veel

Probleem: de relaxatie geeft ons een niet-mogelijke oplossing (y_2 niet binair!); ook een naïeve afronding van y_2 naar 0 of 1 levert geen mogelijke oplossing (totaal gewicht $\neq$ 1000)

Nut van relaxaties

Relaxaties zijn nuttig

- (altijd) om grenzen te bepalen voor de optimale kost: de optimale kost van het gerelaxeerd probleem is
  - een bovengrens in een maximalisatieprobleem
  - en een ondergrens in een minimalisatieprobleem
- (soms) om de exacte oplossing te berekenen: als het gerelaxeerd optimum een mogelijke oplossing is van het origineel probleem is het gelijk aan het origineel optimum
  - voorbeeld: het trofeeprobleem levert een gehele oplossing
- (eventueel) om aan te tonen dat er geen mogelijke oplossingen zijn (als er na relaxatie geen mogelijke oplossingen zijn, kunnen er ook geen zijn voor relaxatie)
- (soms) om benaderde oplossingen te berekenen:
  - soms kan men de reële oplossing na continue relaxatie afronden naar een gehele oplossing die voldoet aan de beperkingen

Aantonen niet-oplosbaarheid

Voorbeeld: Origineel probleem: minimaliseer $8x_1+2x_2$ waarbij

$x_1-x_2 \ge 2$, $-x_1+x_2 \ge -1$, x_1, x_2 geheel

Continue relaxatie: x_1, x_2 reëel

$\Rightarrow$ dit zuiver lineair programma heeft geen oplossing omdat de beperkingen tegenstrijdig zijn:

$x_1-x_2 \ge 2$, $x_1-x_2 \le 1$

$\Rightarrow$ het origineel probleem heeft geen mogelijke oplossing

Hier zien we op het zicht dat er geen oplossing is, maar voor complexere problemen is dit niet evident

$\Rightarrow$ we kunnen dan het simplexalgoritme gebruiken om aan te tonen dat er geen oplossing is

Grenzen berekenen voor het optimum

Voorbeeld: Origineel probleem: maximaliseer $x_1+x_2+x_3$ waarbij

$x_1+x_2 \le 1$, $x_1+x_3 \le 1$, $x_2+x_3 \le 1$ x_1, x_2, x_3 = 0 of 1

Optimale oplossing (op zicht):

- slechts één van de veranderlijken kan 1 zijn

$\Rightarrow$ mogelijke oplossingen: (1,0,0), (0,1,0) en (0,0,1) elk met kost 1

Continue relaxatie:

- simplexmethode geeft (0.5, 0.5, 0.5) als optimale oplossing, met optimale kost 1.5 (interessante oefening!)

$\Rightarrow$ de optimale kost in het origineel probleem is $\le$ 1.5

Opmerking: afronding naar een mogelijke oplossing

- is hier wel mogelijk en eenvoudig: rond naar beneden af
- maar geeft een zeer slechte winst (0 i.p.v. 1)

Grenzen: voorbeeld - Austin EMS

Bedien alle districten met zo weinig mogelijk EMS-stations (een station wordt gebouwd als $x_j=1$)

⇒de te minimaliseren kost is hier dus $\sum_{j=1}^{10} x_j$

Continue relaxatie en oplossen met de simplex-methode levert optimale gerelaxeerde oplossing met kost 6:

$x_1=x_7=0$ $\quad$ $x_2=x_3=x_8=x_{10}=1$ $\quad$ $x_4=x_5=x_6=x_9=0.5$

Besluit: minstens 6 EMS-stations nodig (want optimale kost ≥ 6)

Sub-optimale oplossing via afronding

- alle beperkingen zijn van de vorm $x_a+\ldots+x_c \geq 1$

⇒ als we oplossingen naar boven afronden blijven ze mogelijk

⇒ suboptimale oplossing: $x_1=x_7=0$, $x_2=x_3=x_8=x_{10}=1$, $x_4=x_5=x_6=x_9=1$ met kost 8 (dus met 8 EMS-stations)

Afronding naar een mogelijke oplossing is niet altijd zo gemakkelijk (cfr. “Swedish Steel”)!

Versterken van relaxaties

Versterken van relaxaties

Sommige lineaire ongelijkheden in “gehele” lineaire programma’s worden op nogal artificiële manier ingevoerd en kunnen worden vervangen door andere maar equivalente ongelijkheden

Voorbeeld: exclusiviteitsvoorwaarde: ofwel 1 ofwel 2 ofwel 3:

⇔ A: $x_1+x_2 \leq 1$ en $x_1+x_3 \leq 1$ en $x_2+x_3 \leq 1$ en alle x_i binair

⇔ B: $x_1+x_2+x_3 \leq 1$ en alle x_i binair

⇔ C: A en B

De keuze van de ongelijkheden heeft geen invloed op de oplossing van het origineel discreet probleem, maar wel op de oplossing van het continu-gerelaxeerd probleem

⇒ sommige keuzes geven dus een betere grens voor de optimale kost dan andere omdat ze minder bijkomende oplossingen toevoegen

Versterken van relaxaties: voorbeeld 1

A: Maximaliseer $x_1+x_2+x_3$
$x_1+x_2 \leq 1$, $x_1+x_3 \leq 1$,
$x_2+x_3 \leq 1$, alle x_i binair

⇔

C: Maximaliseer $x_1+x_2+x_3$
$x_1+x_2 \leq 1$, $x_1+x_3 \leq 1$,
$x_2+x_3 \leq 1$, alle x_i binair,
$x_1+x_2+x_3 \leq 1$

continue relaxatie en simplex

Optimum: $x_1=x_2=x_3= 0.5$ met winst 1.5

Optimum: $x_1=1$, $x_2=x_3= 0$ met winst 1

Bovengrenzen voor de optimale winst

Relaxatie van C geeft een betere bovengrens en leidt zelfs tot een binaire optimale oplossing (alle x_j gelijk aan 1 of 0)

⇒Het gerelaxeerd maximum is mogelijk in het origineel probleem en dus ook optimaal in origineel probleem

Versterken relaxaties: voorbeeld 2...

Een bedrijf wil centrales bouwen voor het opvangen van gratis telefoonoproepen uit 14 districten (Rardin p. 595)

Er is keuze uit 8 mogelijke centrales

- het opzetten van centrale i kost f_i
- elke centrale i kan elk district j bedienen, en de kost van een gesprek vanuit zone j naar centrale i is $r_{i,j}$
- elke centrale moet minstens 1500 en maximaal 5000 gesprekken verwerken

Het aantal te behandelen gesprekken in district j is d_j

Gevraagd: zoek de goedkoopste oplossing om alle gesprekken af te handelen

- welke centrales moeten er worden gebouwd?
- hoeveel gesprekken van elk district moeten ze behandelen?

...Versterken relaxaties: voorbeeld 2...

Variabelen: •binaire y_i: y_i=1 als centrale i wordt opgezet
•continue $x_{i,j} \geq 0$: fractie van de oproepen uit district j die door centrale i worden verwerkt

Dus, minimaliseer de totale kost $\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{14} r_{i,j} d_j x_{i,j} + \sum_{i=1}^{8} f_i y_i$ mits

$$1500\, y_i \leq \sum_{j=1}^{14} d_j x_{i,j} \leq 5000\, y_i \quad i = 1 \ldots 8$$ minimaal/maximaal aantal gesprekken

$$\sum_{i=1}^{8} x_{i,j} = 1 \quad j = 1 \ldots 14$$ alle oproepen behandelen

Echt optimum heeft kost 10 153 en alle y_i=0 behalve $y_4 = y_8 = 1$

Continue relaxatie levert een optimum met kost 8 036.6 en $y_1 = 0.23$, $y_4 = 0.301$, $y_5 = 0.115$, $y_8 = 0.65$, $y_2 = y_3 = y_6 = 0$

$\Rightarrow$ Dit is slechts een zwakke ondergrens (80%) voor de echte kost

...Versterken relaxaties: voorbeeld 2...

Interpretatie van $\sum_{j=1}^{14} d_j x_{i,j} \leq 5000\, y_i$

$$y_i \geq \sum_{j=1}^{14} d_j x_{i,j} / 5000 = \frac{\text{gesprekken verwerkt door centrale } i}{\text{maximale capaciteit van centrale } i}$$

Probleem: beschouw in het gerelaxeerde probleem een mogelijke oplossing waarbij centrale i zeer weinig wordt benut

$\Rightarrow$ de $x_{i,j}$-variabelen zijn dus zo dat het rechterlid van de bovenstaande ongelijkheid zeer klein is

$\Rightarrow$ de ongelijkheid laat oplossingen met zeer kleine waarden van y_i toe waardoor de vaste openingskost $f_i y_i$ na relaxatie sterk wordt onderschat t.o.v. de echte vaste kost 1 f_i

Mogelijke (geldige) extra voorwaarden: $y_i \geq x_{i,j}$ voor alle i, j

- deze voorwaarden dwingen in een aantal gevallen y_i op een hogere waarde, b.v. als $x_{i,1}$=1 en $x_{i,j}$=0 voor $j \neq 1$

$\Rightarrow$ beperking $y_i \geq d_1$ /5000 wordt dan $y_i \geq \max_i(x_{i,j})$=1

..Versterken relaxaties: voorbeeld 2

	kost	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	y8
echt optimum	10 153.0	0	0	0	1	0	0	0	1
relaxatie versie 1	8 036.6	0.23	0	0	0.301	0.115	0	0	0.65
relaxatie versie 2	10 033.7	0	0	0	0.537	0	0	0	1

Besluit: de bijkomende voorwaarden

- veranderen niets aan de oplossing van het origineel discreet probleem (ze zijn triviaal geldig)
- maar beperken wel het aantal mogelijke oplossingen in de continue relaxatie en versterken dus de eerste relaxatie

Gevolg: de tweede relaxatie levert een veel scherpere ondergrens voor de optimale kost van het origineel probleem

Opmerking: afronden van de y_i-variabelen naar een mogelijke oplossing is hier niet triviaal omdat ze zowel naar boven als onder worden begrensd door andere variabelen:

1500 $y_i \leq$ combinatie van $x_{i,j} \leq$ 5000 y_i

Opmerking

Slides die in de les werden overgeslagen moeten zoals gewoonlijk wel gekend zijn

versie: 13/3/2012
© W. Philips, Universiteit Gent, 1998-2012

Opmerking

Slides die in de les werden overgeslagen moeten zoals gewoonlijk wel gekend zijn