

Digital Image Processing

23 November 2006

Dr. ir. Aleksandra Pizurica

Prof. Dr. Ir. Wilfried Philips

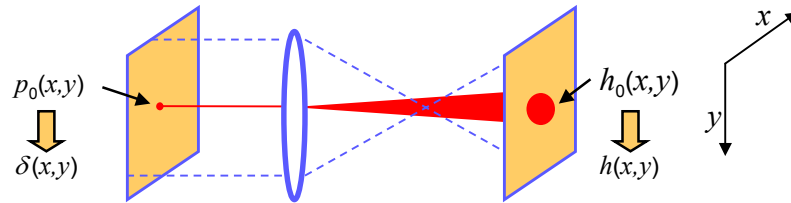
Aleksandra.Pizurica @telin.UGent.be

Tel: 09/264.3415



**Spatiale en temporele aspecten
beeldopname en weegave**

De lens



Beeld 1 Optisch systeem

Beeld 2

Experiment

- beeld 1= puntje dat steeds kleiner wordt maar ook helderder zodat totaal lichtvermogen=1 bij elke puntgrootte: $\delta(x,y) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-2} p_0(x/\Delta, y/\Delta)$
- in de limiet convergeert beeld 2 naar **de impulsrespons** $h(x,y)$

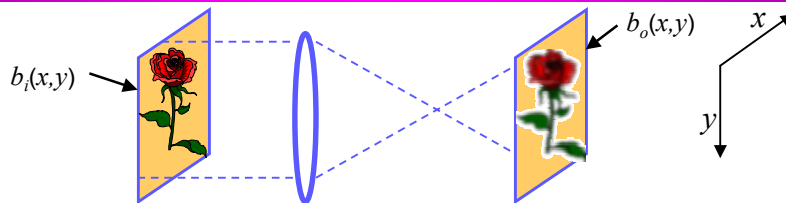
Definitie: de **puntspreidingsfunctie** of **impulsrespons** $h(x,y)$ is de reactie op een puntbron $\delta(x,y)$ met eenheidsamplitude in $(x,y)=(0,0)$

Eigenschappen (benadering!)

- Plaatsinvariantie (bij benadering): $\delta(x-x_0, y-y_0) \rightarrow h(x-x_0, y-y_0)$
- Lineariteit: $a_0 \delta(x-x_0, y-y_0) + a_1 \delta(x-x_1, y-y_1) \rightarrow a_0 h(x-x_0, y-y_0) + a_1 h(x-x_1, y-y_1)$

02b.3

Beeldvorming van een willekeurig beeld



Beeld 1 Optisch systeem

Beeld 2

Een willekeurig beeld $b_i(x,y)$ kan worden beschouwd als een superpositie van puntbronnen $b_i(x',y')\delta(x-x',y-y')$ met sterkte $b_i(x',y')$

$$b_i(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b_i(x',y') \delta(x-x', y-y') dx' dy'$$

Plaatsinvariantie

lineariteit $\Rightarrow$ beeld 2 is de som (integraal) van gewogen responsen van puntbronnen

$$b_o(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b_i(x',y') h(x-x', y-y') dx' dy' = (h * b_i)(x,y) \quad (\text{convolutie})$$

02b.4

De 2D fouriertransformatie

Definitie: $B(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$ **complexwaardig!**

Inverse transformatie: $b(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(f_x, f_y) e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \underbrace{B(k\Delta, l\Delta) e^{j2\pi(k\Delta x + l\Delta y)} \Delta^2}_{\text{bijdrage (k,l)-de freq. interval}}$$

Elk beeld kan beschouwd worden als de som van oneindig veel, maar ook oneindig zwakke sinusoidale frequentiecomponenten

Beperking: de integralen bestaan soms niet, b.v. voor functies met oneindige energie

Voorbeeld: $b(x, y) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$ bestaat niet

Dergelijke integralen bestaan wel in de zin van de distributies

02b.5

Belangrijke eigenschappen

Belangrijkste eigenschap: convolutie in plaatsdomein is equivalent met vermenigvuldiging in frequentiedomein

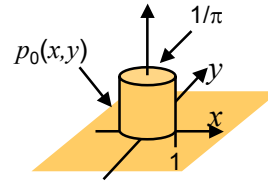
convolutie	$(b * h)(x, y)$	$B(f_x, f_y) H(f_x, f_y)$
	$b(x, y) h(x, y)$	$B * H(f_x, f_y)$
lineariteit	$\alpha b(x, y) + \beta h(x, y)$	$\alpha B(f_x, f_y) + \beta H(f_x, f_y)$
verschuiving	$b(x - \alpha, y - \beta)$	$B(f_x, f_y) e^{-j2\pi(\alpha f_x + \beta f_y)}$
	$b(x, y) e^{j2\pi(\alpha x + \beta y)}$	$B(f_x - \alpha, f_y - \beta)$
schaling	$b(x / \alpha, y / \beta)$	$ \alpha \beta B(\alpha f_x, \beta f_y)$
	$b(x / \alpha, y / \beta) / \alpha \beta $	$B(\alpha f_x, \beta f_y)$

02b.6

De dirac-distributie

Definitie Dirac impuls: voor elke “voldoend brave” functie $f(x,y)$ is **per definitie**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y) f(x,y) dx dy = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{-2} p_0(x/\Delta, y/\Delta) f(x,y) dx dy = f(0,0)$$



In het bijzonder: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y) e^{\pm j 2\pi (f_x x + f_y y)} dx dy = e^{\pm j 2\pi (f_x 0 + f_y 0)} = 1$

⇒ redelijke definitie voor de inverse FT van $\delta(x,y)$: $\text{IFT}\{\delta(x,y)\}=1$

⇒ redelijke definitie voor de FT van $b(x,y)=1$: $\text{FT}\{1\}=\delta(x,y)$

Betekenis van $\text{FT}\{1\}=\delta(x,y)$

• de functie $f(x,y)=1$ kan beschouwd worden als de limiet van functies $f_n(x,y)$ die wel een FT hebben, n.l. $F_n(f_x, f_y)$

• en waarbij $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x,y) G(f_x, f_y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y) G(f_x, f_y) dx dy$

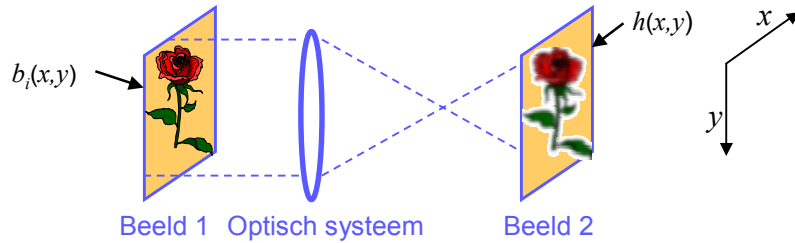
02b.7

Fouriergetransformeerden en distributies

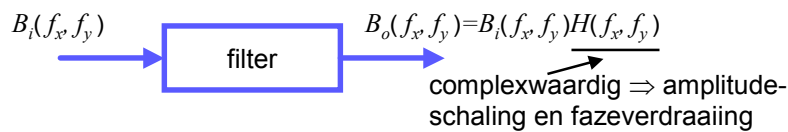
$f(x,y)$	$\text{FT}\{f(x,y)\}$
$\delta(x,y)$	1
$\delta(x-\alpha, y-\beta)$	$e^{-j 2\pi (\alpha f_x + \beta f_y)}$
1	$\delta(f_x, f_y)$
$e^{j 2\pi (\alpha x + \beta y)}$	$\delta(f_x - \alpha, f_y - \beta)$
$\cos(2\pi(\alpha x + \beta y))$	$\frac{1}{2}(\delta(f_x - \alpha, f_y - \beta) + \delta(f_x + \alpha, f_y + \beta))$
$\sin(2\pi(\alpha x + \beta y))$	$\frac{1}{2j}(\delta(f_x - \alpha, f_y - \beta) - \delta(f_x + \alpha, f_y + \beta))$

02b.8

Beeldvorming van een willekeurig beeld



$$b_o(x, y) = (h * b_i)(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad B_o(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) B_i(f_x, f_y)$$



$\Rightarrow$ Optisch systeem verandert beeldspectrum $B(f_x, f_y)$ **op eenvoudige manier**
 Het gedraagt zich als een lineair filter dat $B(f_x, f_y)$ vermenigvuldigt met een factor die afhangt van de spatiale frequentie (f_x, f_y)

02b.9

De stelling van Parseval

Stelling van Parseval:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |b(x, y)|^2 dx dy}_{\text{energie in plaatsdomein}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |B(f_x, f_y)|^2 df_x df_y}_{\text{energie in frequentiedomein}}$$

$\Rightarrow$ De fouriertransformatie bewaart de totale energie in het beeld

Definitie: $|B(f_x, f_y)|^2$ is het energiespectrum van het beeld

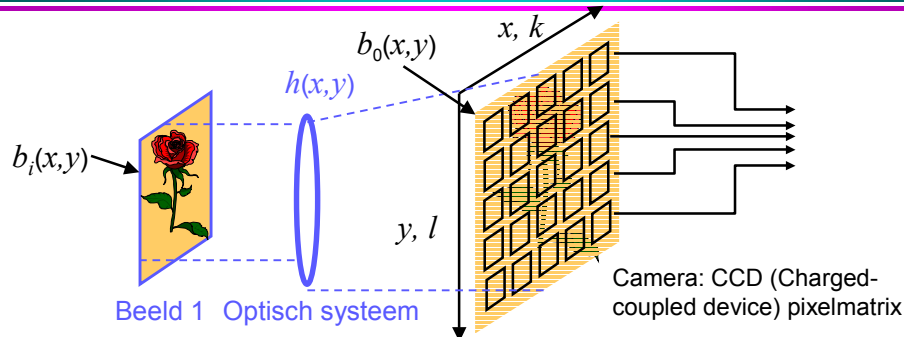
Interpretatie: $|B(f_x, f_y)|^2 df_x df_y$ is de bijdrage van het frequentiegebied $[f_x, f_x + df_x] \times [f_y, f_y + df_y]$ tot de totale beeldenergie

Een filter verzwakt/versterkt de energie bij bepaalde spatiale frequenties:

$$|B_i(f_x, f_y)|^2 df_x df_y \rightarrow |H(f_x, f_y)|^2 |B_i(f_x, f_y)|^2 df_x df_y$$

02b.10

Model voor een camera



Een pixelsensor meet de beeldintensiteit in de omgeving van (x_k, y_l)

$$b_{kl} = \iint b_o(x_k - x', y_l - y') w(x', y') dx' dy' = (b_o * w)(x_k, y_l) = b(x_k, y_l)$$

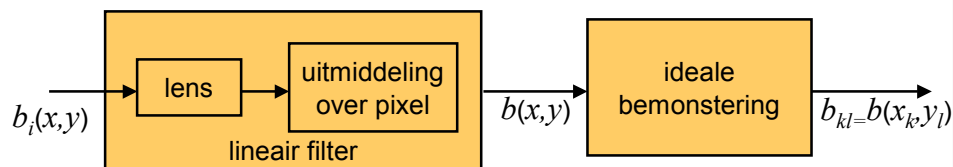
↑ gewichtsfunctie, b.v. $w(x, y) = 1$
voor $|x| < \Delta$ en $|y| < \Delta$ en 0 daarbuiten

Opmerking: $b_{kl} = b(x_k, y_l)$ met $b(x, y) = (b_i * h * w)(x, y) = (b * h')(x, y)$

⇒ wiskundig model: lineair filter, gevolgd door "ideale" bemonstering

02b.11

Welke informatie gaat er verloren?



Het lineair filter verzwakt hoge spatiale frequenties (laagdoorlaatfilter)

⇒ het beeld wordt **waziger**, fijne details gaan verloren

De bemonstering behoudt enkel de waarden van $b(x, y)$ op discrete posities (x_k, y_l)

⇒ **aliasing** (frequentieverwarring): hoogfrequente componenten kunnen worden omgezet in laagfrequente componenten

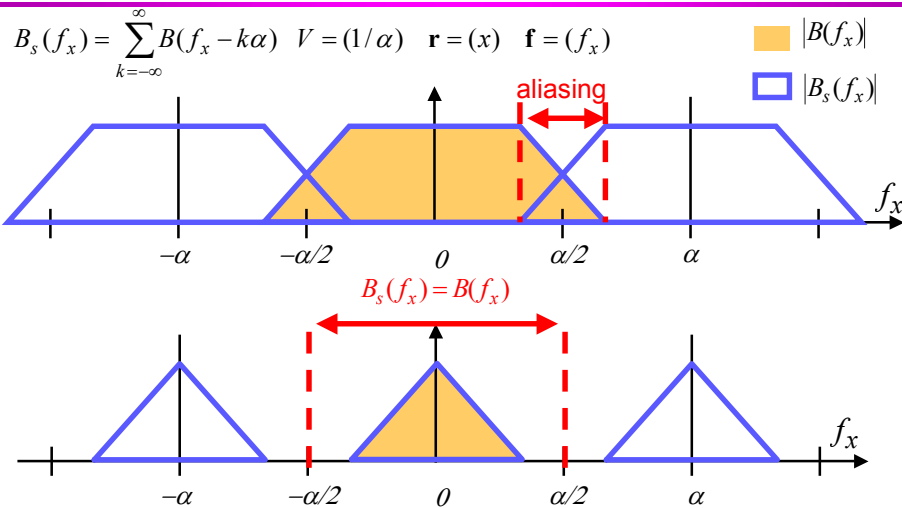
Opmerkingen

•meest courant: uniforme bemonstering: $x_k = k\Delta$, $y_l = l\Delta$

•algemener: bemonstering op een rooster ("lattice") $\begin{pmatrix} x_k \\ y_l \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ (bemonsteringsmatrix V)

02b.12

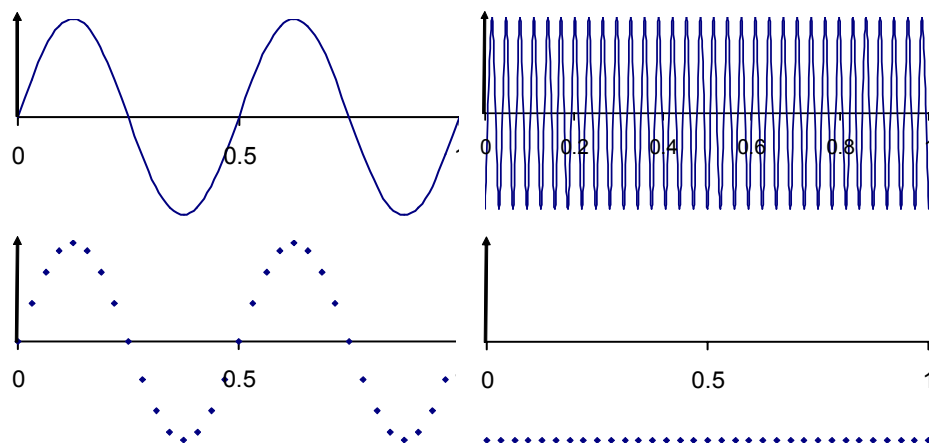
1D- Voorbeelden



Geen aliasing als $|B(f_x)| = 0$ voor $|f_x| \geq \alpha/2 \Rightarrow$ men kan dan $B(f_x)$ terugberekenen uit $B_s(f_x)$ door de frequenties $|f_x| \geq \alpha/2$ weg te filteren

02b.13

Bemonstering en aliasing

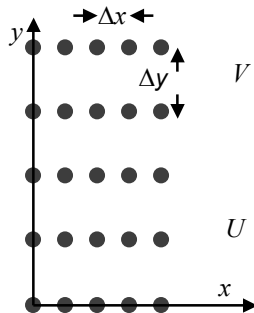


Tussen de monsterpunten in kan er van alles gebeuren
Aliasing: een hoogfrequent signaal kan na bemonstering niet meer onderscheiden worden van een laagfrequent signaal

02b.14

2D voorbeelden: Rechthoekig rooster

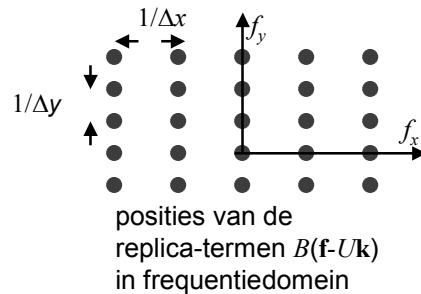
Bemonsteringsrooster



$$V = \begin{pmatrix} \Delta x & 0 \\ 0 & \Delta y \end{pmatrix}$$

$$U = (V^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1/\Delta x & 0 \\ 0 & 1/\Delta y \end{pmatrix}$$

Reciprook rooster



Reciprook rooster van rechthoekig rooster is ook rechthoekig

Afstanden in het reciprook rooster zijn omgekeerd evenredig met deze in het bemonsteringsrooster

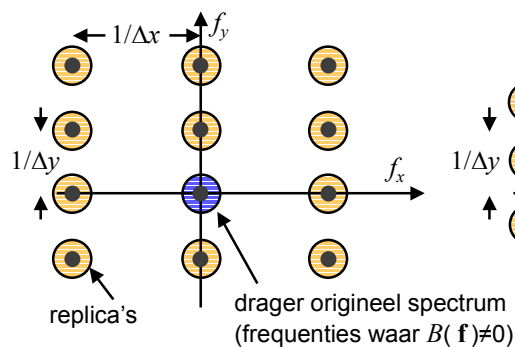
⇒ bij fijnere spatiale bemonstering liggen replica's verder uit elkaar

Opmerking: aantal monsters per oppervlakte-eenheid: $1/(\Delta x \Delta y) = 1/|\det(V)|$

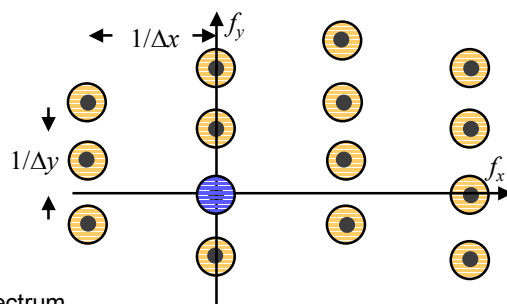
02b.15

Bemonstering zonder aliasing in 2D

Reciprook van rechthoekig rooster



Reciprook van hexagonaal rooster



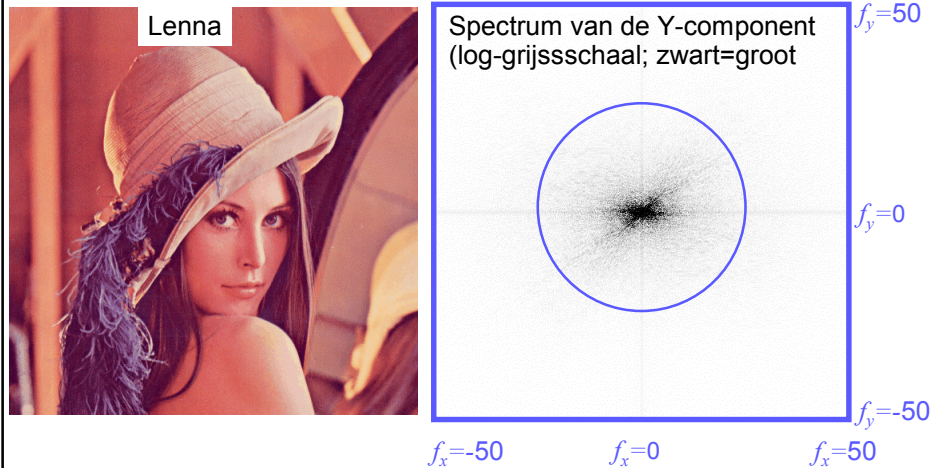
Praktische beelden hebben een bandbeperkt spectrum (o.a. door verwaziging in de lens en uitmiddeling over camerapixels)

Indien de punten van het reciprook rooster voldoende ver uit elkaar liggen zal er geen aliasing optreden

⇔ punten van bemonsteringsrooster liggen voldoende dicht bij elkaar

02b.16

Typische beeldspectrum

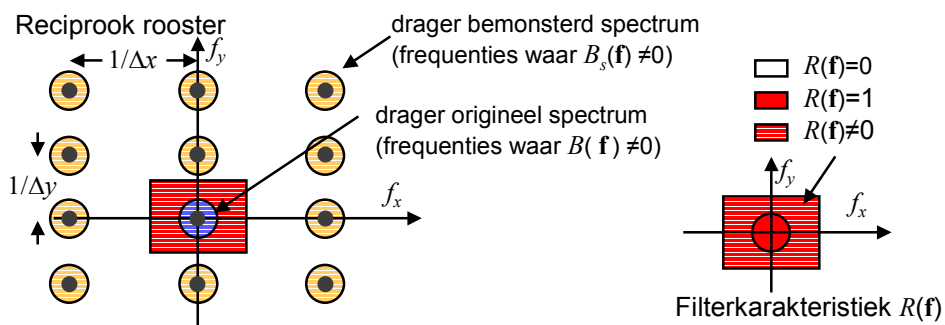


De energie van typische beelden is geconcentreerd bij lage f_x en f_y .
 Frequentieschaal: in "cycles per inch" (cpi), representatief voor weergave op een scherm met resolutie 100 "dots per inch" (dpi)

Frequentieinhoud hangt ook af van captatieresolutie (lens+pixelgrootte)

02b.17

Theoretische reconstructie



$$B_s(\mathbf{f}) = \sum_{\mathbf{k}=-\infty}^{+\infty} B(\mathbf{f} - U\mathbf{k}) \Rightarrow B_s(\mathbf{f})R(\mathbf{f}) = B(\mathbf{f})\underline{R(\mathbf{f})} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} B(\mathbf{f} - U\mathbf{k}) \underline{R(\mathbf{f})}$$

$$R(\mathbf{f})=1 \text{ waar } B(\mathbf{f}) \neq 0 \quad R(\mathbf{f})=0 \text{ waar } B(\mathbf{f}-U\mathbf{k}) \neq 0$$

$$= B(\mathbf{f}) + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} B(\mathbf{f} - U\mathbf{k})0 = B(\mathbf{f})$$

Besluit: reconstructie is mogelijk als replica's niet overlappen, n.l. door $B_s(\mathbf{f})$ te vermenigvuldigen met goed gekozen $R(\mathbf{f})$ ($\Leftrightarrow$ lineair filter)

02b.18